LỜI NÓI ĐẦU

Trong bộ môn Toán ở trường phổ thông thì phần số học được xem là một trong những phần khó, nhiều học sinh khá thậm chí giỏi còn lo ngại tránh né bởi vì học sinh chưa hình thành được những phương pháp giải để học sinh ứng dụng vào việc giải một bài toán số học.

Qua nội dung về Bài tập lớn em xin trình bày, một số chuyên đề về số học và ứng dụng của nó trong việc chứng minh và giải quyết các bài toán có liên quan. Nhằm giúp học sinh bớt lúng túng khi gặp các bài toán về số học, đặc biệt là giúp cho các em khá, giỏi nắm vững kiến thức và có phương pháp học tốt hơn để có thể tham gia tốt trong kì thi học sinh giỏi cấp THCS

Đề tài gồm các chuyên đề sau:

Chuyên đề 1: Tính chia hết

Chuyên đề 2: Số nguyên tố

Chuyên đề 3: Số chính phương

Chuyên đề 4: Bội và ước của các số

Mỗi chuyên đề có trình bày lý thuyết, các phương pháp giải, Với mỗi phương pháp có các phương pháp cụ thể sau đó là các ví dụ minh hoạ, bài tập tự giải có hướng dẫn nhằm gúp học sinh rèn luyện được kỷ năng và kiến thức về phần số học/.

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

CHUYÊN ĐỀ 1: TÍNH CHIA HẾT.

A. Lý thuyết

I. Phép chia hết và phép chia có dư.

Cho hai số tự nhiên a, b, b $\neq$ 0. Nếu có số tự nhiên qsao cho a = bq thì ta nói a chia hết cho b, kí hiệu a $\vdots$ b, hoặc b chia hết cho a, kí hiệu b | a. Số q (nếu có) được xác định duy nhất và được gọi là thương của a và b, kí hiệu q = a : b

hoặc q = $\frac{a}{b}$. Quy tắc tìm thương của hai số gọi là phép chia.

Tuy nhiên với hai số tự nhiên bất kì a, b không phải luôn luôn có a chia hết cho b hoặc b chia hết cho a, mà ta có định lí sau:

Với mọi cặp số tự nhiên a, b, b$\neq$ 0, bao giờ cũng tồn tại duy nhất một cặp số tự nhiên q, r sao cho:

$$A = bq + r, 0 \leq r < b.$$

Số q và r trong định lí về phép chia có dư nói trên lần lượt được gọi là thương và dư trong phép chia số a cho số b.

II. Phép đồng dư.

Cho m là một số nguyên dương. Nếu hai số nguyên a và b cùng cho một số dư khi chia cho m thì ta nói rằng a, b đồng dư với nhau theo mođun m và kí hiệu:

$$a \equiv b \pmod m$$

Giả sử số dư cùng là r thì ta có:

$$a = mq + r \quad (1)$$

$$b = mq' + r \quad (2)$$

lúc đó a – b = m(q – q’) như vậy a – b chia hết cho m. vậy :

$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b \vdots m.$$

III. Dấu hiệu chia hết.

Một số tự nhiên sẽ:

- Chia hếtcho 2 nếu nó là số chẵn, tận cùng bằng 0, 2, 4, 6, 8
- Chia hết cho 5 nếu tận cùng bằng 0 hoặc 5.

- Chia hết cho 4 nếu số tạo bởi hai chử số cuối chia hết cho 4
- Chia hết cho 8 nếu số tạo bởi 3 chử số tận cùng chia hết cho 8
- Chia hết cho 25 nếu số tạo bởi hai chử số cuối cùng chia hết cho 25.
- Chia hết cho125 nếu số tạo bởi 3 chử số cuối cùng chia hết cho 125.
- Chia hết cho 3 nếu tổng của các chử số của số đó chia hết cho 3.
- Chia hết cho 9 nếu tổng của các chử số đó chia hết cho 9

Chú ý: Số dư trong phép chia một số N cho 3 hoặc 9 cũng chính là dư trong phép chia tổng các chử số của N cho 3 hoặc 9.

B. Các dạng toán.

Dạng 1. Xét mọi trường hợp có thể xảy ra của số dư.

Muốn chứng minh một biểu thức của n là A(n) chia hết cho q ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho q.

Bài 1.

Chứng minh tích của 2 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2.

Giải.

Giả sử A = n(n + 1), có 2 trường hợp

-Nếu n chẵn, thì n 2 do đó A chia hết cho 2.

- Nếu n lẻ thì n +1 chẵn do đó (n +1) chia hết cho 2 nên A chia hết cho 2.

Bài 2.

Chứng minh rằng $A(n) = n(n^2+1)(n^2+4) \vdots 5$

Giải.

Xét các trường hợp về số dư khi chia n cho 5, ta có:

- Nếu số dư là 0 thì n = 5k và A(n) $\vdots$ 5
- Nếu số dư là ± 1 thì ta có n = 5k $\pm$ 1

  và $n^2 + 4 = (5k \pm 1)^2 + 4 = 25k^2 \pm 10k + 5 \vdots 5$.
- Nếu số dư là ± 2 thì ta có n = 5k $\pm$ 2

  và $n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 4 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 \vdots 5$.

Vậy khi chia n cho 5 dù số dư là 0, ± 1, hay ± 2 biểu thức A(n) cũng đều chia hết cho 5.

Dạng 2: Tách thành tổng nhiều hạng tử.

Đây là một phương pháp khá thông dụng. Muốn chứng minh A(n) chia hết cho q , ta tách A(n) thành tổng của nhiều hạng tử sao cho mỗi hạng tử đều có thể chia hết cho q.

Bài 1.

Chứng minh rằng $n^5 + 10n^4 – 5n^3 – 10n^2 + 4n$ chia hết cho 120.

Giải.

Ta tách biểu thức đã cho như sau:

$A = n^5 – 5n^3 + 4n + 10n^4 – 10n^2$

$= n(n^4 – 5n^2 + 4) + 10n^2(n^2 – 1)$

Hạng tử thứ nhất là :

$n(n^4 – 5n^2 + 4) = n(n^2 – 1)(n^2 – 4)$

$= (n – 2)(n – 1)n(n + 1)(n + 2)$

Đây là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho

2.3.4.5 = 120

Hạng tử thứ hai là: $10n^2(n + 1)(n – 1)$. Có 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3. hạng tử này chia hết cho 4 nếu n chẳn. Còn nếu n lẽ thì (n + 1) và n – 1 cũng chẳn nên tích (n + 1)(n – 1) cùng chia hết cho 4.

Vậy hạng tử thứ hai cũng chia hết cho 3.5.10 = 120

A là tổn của hai hạng tử chia hết cho 120 nên A cũng chia hết cho 120.

Bài 2.

Chứng minh rằng với mọi m thuộc Z ta có $m^3 – 13m$ chia hết cho 6.

Giải.

$A = m^3 – 13m$

$= m^3 – m – 12m$

$= m(m^2 – 1) – 12m$

$= (m – 1)m(m + 1) – 12m$

Do m – 1, m, m + 1 là 3 số nguyên liên tiếp nên tích (m – 1)m(m + 1) vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3, tức là (m – 1)m(m + 1) chia hết cho 6.

Từ đó suy ra A chia hết cho 6.

Bài 3.

Chứng minh rằng với mọi m, n thuộc Z ta có $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 3.

Giải.

Ta có

$$mn(m^2 - n^2) = mn[(m^2 - 1) - (n^2 - 1)]$$
$$= mn(m^2 - 1) - mn(n^2 - 1)$$

Mà $m(m^2 - 1) = (m - 1)m(m + 1)$ chia hết cho 6

Và $n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ chia hết cho 6.

Vậy $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 6.

Dạng 3. Phân tích thành nhân tử.

Ta cũng có thể phân tích số bị chia thành nhân tử sao cho một hạng tử có chứa số chia. Muốn chứng minh A(n) chia hết cho q ta chứng minh rằng :

$A(n) = q.B(n)$

Thông thường ta dùng các hằng đẳng thức có dạng $a^n - b^n$ hoặc $a^n + b^n$

Bài 1.

Chứng minh rằng biểu thức :

$$A = 75\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 5\right) + 25$$

Chia hết cho 4^{1976}

Giải.

Ta viết A dưới dạng

$$A = 75\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 5\right) + 25$$
$$= 25.3\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 5\right) + 25$$
$$= 25\left(4 - 1\right)\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 4 + 1\right) + 25$$
$$= 25.\left(4^{1976} - 1\right) + 25$$
$$= 25.4^{1976}$$

Vậy A chia hết cho 4^{1976}

Bài 2.

Chứng minh n^5 – n chia hết cho 5 $\forall n \in Z$

Giải.

Ta có A = $n^5 - n = n(n^4 - 1)$

$= n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

Nếu n = 5k thì n chia hết cho 5 do đó A chia hết cho 5

Nếu n = 5k + 1 thì (n – 1) chia hết cho 5

Nếu n = 5k + 2 thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Nếu n = 5k + 3 thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Nếu n = 5k + 4 thì (n + 1) chia hết cho 5

Vậy n^2 – n chia hết cho 5 , $\forall n \in Z$

Dạng 4. Sử dụng định lí Fermat và định lí Euler .

Fermat là một nhà toán học Pháp (1601 – 1655) nổi tiếng với những định lí về số nguyên tố. Định lí Fermat sau đây rất hay được dùng để giải các bài toánvề chia hết:

Nếu p là số nguyên tố thì n^p – n chia hết cho p với mọi số nguyên n

$n^p \equiv n$ (mod p), p là số nguyên tố.

Đặc biệt nếu n, p nguyên tố cùng nhau thì $n^{p-1} \equiv 1$ (mod p)

Bài 1.

Chứng minh rằng :

$1^{1991} + 2^{991} + ... + 1991^{1991}$ **chia hết cho 11**

Giải.

Theo định lí Fermat thì $a^{11} \equiv a$ (mod 11), do đó $a^{1991} \equiv a$ (mod 11)

Vậy.

$$1^{1991} + 2^{991} + ... + 1991^{1991} = 1 + 2 + ... + 1991$$
$$= 1991.966 \equiv 0 (\text{mod } 11)$$

Tức là chia hết cho 11.

Bài 2.

Chứng minh rằng nếu a + b + c chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

Giải.

Ta có : 30 = 2.3.5

$a^2 \equiv a(\text{mod } 2) \Rightarrow a^4 \equiv a^2 \equiv a(\text{mod } 2)$

$\Rightarrow a^5 \equiv a^2 \equiv a(\text{mod } 2)$

$a^3 \equiv a(\text{mod } 3) \Rightarrow a^5 \equiv a^3 \equiv a(\text{mod } 3)$

$a^5 \equiv a(\text{mod } 5)$

Theo tính chất của phép đồng dư ta có:

$a^5 + b^5 + c^5 \equiv a + b + c(\text{mod } 2.3.5)$

Tức là a + b+ c chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

Bài 3.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, q , $p \neq q$ **ta có**

$A = p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ **chia hết cho p.q**

Giải.

Vì p, q là số nguyên tố và $p \neq q$ nên (p, q) = 1

Theo định lí Fermat có :

$p^{q-1} \equiv 1(\text{mod } q)$

$q^{p-1} \equiv 0(\text{mod } q)(\text{do } p \geq 2 \Rightarrow p-1 \geq 1)$

Vậy $A = p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod } q)$

Do đó A chia hết cho p.

Bài 4.

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 7. Chứng minh rằng $3^p - 2^p - 1$ chia hết cho 42p.

Giải.

Ta có 42p = 6p.7 = 2.3.p.7

Có :

$$3^p - 2^p - 1 = (3^p - 1) - 2^p \vdots 2$$

$$3^p - 2^p - 1 = 3^p - (2^p + 1) \vdots 3$$

Vì p la số lẻ nên $2^p + 1 \vdots (2+1) = 3$

Áp dụng định lí Fermat: $3^p \equiv 3 (\bmod\ p)$ va $2^p \equiv 2 (\bmod\ p)$

Do đó $3^p - 2^p - 1 = (3^p - 3) - (2^p - 2) \vdots p$

Một số nguyên tố p khi chia cho 6 chỉ có thể dư là 1 hoặc 5

i) Nếu p = 6k + 1 thì

$$3^p - 2^p - 1 = 3.(3^6)^k - 2.(2^6)^k - 1 \equiv 3 - 2 - 1 \equiv 0 (\bmod\ 7)$$

$(\text{vi } 3^6 \equiv 1 (\bmod\ 7), \text{ va } 2^6 \equiv 1 (\bmod\ 7))$

ii) Nếu p = 6k + 5 thì $3^p - 2^p - 1 = 3^5.3^{6k} - 2^5.2^{6k} - 1 \equiv 3^5 - 2^5 - 1 \equiv 0 (\bmod\ 7)$

Vậy $3^p - 2^p - 1 \vdots 7$

Từ các điều trên $3^p - 2^p - 1 \vdots 2.3.7.p = 42p$ (đpcm).

Dạng 5. Sử dụng nguyên tắc Dirichlet .

Nguyên lí Dirichlet là một định lí có chứng minh dể dàng bằng phản chứng và được sử dụng để chứng minh nhiều định lí toán học. Nguyên lí này thường được phát biểu một cách hình học và đơn giản như sau:

Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi lồn không quá hai con thỏ. Nói một cách khác: Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì sẻ có một lồng chứa từ 3 con thỏ trở lên.

Một cách tổng quát có thể phát biểu:

Nếu đem n + 1 vật xếp vào ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ hai vật trở lên.

Nguyên lí này giúp ta giải một bài khá dể dàng nhất là các bài toán về chia hết.

Bài 1.

Chứng minh rằng trong n + 1 số nguyên bất kì có hai số mà hiệu chia hết cho n.

Giải.

Lấy n + 1 số nguyên đã cho chia cho n thì được n + 1 số dư. Nhưng khi chia một số cho n thì số dư chỉ có giá trị 0, 1, 2, …, n – 1. vậy trong phép chia thì phải có hai số dư bằng nhau. Khi đó hiệu số của hai số này sẻ chia hết cho n.

Bài 2.

Chứng minh rằng trong các số tự nhiên, thế nào cũng có số k sao cho 1983^k – 1 chia hết cho 10^5

Giải.

Ta cho k lấy lần lượt $10^5 + 1$ giá trị liên tiếp từ 1 trở lên, ta được $10^5 + 1$ giá trị khác nhau của $1983^k - 1$. sau đó chia các giá trị này cho 10^5 , ta chỉ có nhiều nhất là 10^5 số dư. Vậy theo nguyên lí Dirichlet, phải có ít nhất hai số cùng cho một số dư khi chia cho 10^5.

Giả sử đó là các số $1983^m - 1$ và $1983^n - 1$(với m > n). Như vậy hiệu của chúng

$(1983^m - 1) - (`983^n - 1) = 1983^m - 1983^n = 1983^n(1983^{m-n} - 1)$ phải chia hết cho 10^5

Nhưng 10^5 chỉ có các ước số2, 5 còn 2 và 5 không phải là ước số của 1983^n vậy chúng nguyên tố cùng nhau, do đó.

$1983^{m-n} - 1$ phải chia hết cho 10^5.

Như vậy k = m – n chính là số phải tìm.

Bài 3.

Viết các số tự nhiên từ 1 đến 100 thành hàng ngang theo một thứ tự tuỳ ý, tiếp đó cộng mỗi một số trong các số đã cho với số thứ tự chỉ vị trí nó đứng (tính từ trái sang phải). Chứng minh rằng ít nhất củng có hai tổng mà chử số tận cùng của hai tổng đó như nhau.

Giải.

Gọi 10 số tự nhiên từ 1 đến 10 viết theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1, a_2,\dots, a_{10}$. Ta lập dãy mới $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ với $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2 + 2$;..; $b_{10} = a_{10} + 1$.

b_i là tổng của a_i với vị trí thứ i mà nó đứng (i = 1, 2, …, 10).

Ta có: $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = a_1 + a_2 + ..+a_{10} + 1 + 2+ ..+10 = 2(1 + 2 + \dots + 10)= 110$

Vì 110 là số chẵn nên không xãy ra trường hợp có 5 số b_i nào đó lẻ và 5 số b_j nào đó chẵn, hay nói cách khác các số b_i chẵn, và các số b_j lẻ phải khác nhau.

Do đó các số b_i lẻ lớn hơn 5 hoặc các số b_j chẵn lớn hơn 5. Mà từ 1 đến 10 chỉ có 5 vị trí lẻ và 5 vị trí chẵn nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số b_i lẻ tận cùng như nhau hoặc có hai số b_j chẵn có chữ số tận cùng như nhau..

Bài 4.

Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại một số có tổng các chử số chia hết cho 10.

Giải.

Trước hết ta chứng minh rằng: với 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số nguyên liên tiếp có chử số hàng chục như nhau còn các chử số hàng đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp có mặt 3 chử số hàng chục khác nhau thì rỏ ràng có một chử số hàng chục(ở giữa hai hàng chục kia) cùng với các chử số đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp chỉ có hai loại chử số hàng chục khác nhau thì từ 19 = 2.9 + 1 suy ra có 10 số có cùng chử số hàng chục và các chử số đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9. Tổng các chử số của mỗi số trong 10 số tự nhiên nói trên cũng lập thành 10 số tự nhiên liên tiếp, vậy phải có một số chia hết cho 10.

Vậy trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số có tổng các chử số chia hết cho 10.

Dạng 6: Sử dụng phép quy nạp .

Ta làm như sau:

- Nhận xét rằng mệnh đề đúng với n = 1
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k cũng chứng mính được nó đúng với

  $n = k + 1$ (với $k > n_0$)

Lúc đó mệnh đề đúng với mọi n lớn hơn 1.

Bài 1.

Chứng minh rằng:

$A = (n + 1)(n + 2)(n + 3)\ldots(3n)$ chia hết cho 3^n

Giải.

Nếu n = 1 ta có A = 2.3 chia hết cho 3

Giả sử mệnh đề đúng với n = k tức là :

$$A_k = (k+1)(k+2)(k+3)...(3k) \vdots 3^k \qquad (*)$$

Ta hãy xét :

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+2)(k+3)(k+4)...[3(k+1)] \\ &= 3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(3k+2) \\ &= 3A_k.(3^k+1)(3^k+2) \end{aligned}$$

Nhưng theo (*) thì A_k chia hết cho 3^k vậy

$$A_{k+1} = 3A_k\,(3k+1)(3k+2) \vdots 3^{k+1}$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi n lớn hơn 1.

<u>Bài 2.</u>

Chứng minh rằng $11^{10^{1994}} - 1$ chia hết cho 10^{1995}.

<u>Giải.</u>

Ta chứng minh bài toán một cách tổng quát:

Với mọi số tự nhiên n thì $11^{10^n} - 1 \vdots 10^{n+1}$

Với n = 0 thì mệnh đề đúng: 11 – 1 chia hết cho 10

Giả sử mệnh đề đúng với n = k, ta có:

$$A_k = 11^{10^k} - 1 \vdots 10^{k+1} \quad (*)$$

Ta hãy xét:

$$A_{k+1} = 11^{10^{k+1}} - 1 = (11^{10^k})^{10} - 1$$

$$A_{k+1} = \left(11^{10^k} - 1\right)\left[\left(11^{10^k}\right)^9 + \left(11^{10^k}\right)^8 + ... + 11^{10^k} + 1\right]$$

Nhưng mọi luỹ thừa của 11 đều đồng dư với 1 (mod 10) nên 10 số hạng trong móc vuông như vậy, do đó:

$$(11^{10^k})^9 + (11^{10^k})^8 + ... + 11^{10^k} + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + ... + 1 + 1}_{10 \text{ so hang}}$$

Và biểu thức trong móc vuông chia hết cho 10

Mặt khác theo $(11^{10^k} - 1) \vdots 10^{k+1}$ vậy

$$A_{k+1} \vdots 10^{k+1}.10 = 10^{k+2}$$

Vậy n = 1994 ta có $11^{10^{1994}} - 1$ chia hết cho 10^{1995}.

C. Bài tập.

1. Cho a, b không chia hết cho 5. Chứng minh rằng $a^4 + b^4$ chia hết cho 5.

2. Chứng minh rằng $ax^3 + bx^2 + cx + d$ là số nguyên với mọi x nguyên và chỉ khi 6a, 2b, a + b + c, d là các số nguyên .

3. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất lì luôn tồn tại một số có tổng các chử số chia hết cho 11.

4. Cho n là số nguyên dương lẻ, chứng minh rằng: $46^n + 296.13^n$ chia hết cho 1947.

5. Với n là số nguyên dương chứng minh rằng:

a) $7^{2n} – 48n – 1$ chia hết cho 48^2,

b) $n^n – n^2 + n – 1$ chia hết cho $(n – 1)^2$ (n > 1)

6. cho f(x) là đa thức với hệ số nguyên và f(0), f(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên.

7. a) Tìm tất cả số tự nhiên n để $2^n – 1$chia hết cho 7.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $2^n + 1$ không chia hết cho 7.

8. Chứng minh rằng tổng bình phương của 7 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

9. Chứng minh rằng có thể tìm được hai luỹ thừa khác nhau của số 4 mà chúng có 3 chử số tận cùng giống nhau.

10. Chứng minh rằng có thể tìm được một số tự nhiên mà 4 chử số tận cùng là 2002 và chia hết cho 2003.

11. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên chỉ gồm toàn chử số 2 và chia hết cho 2003.

12. Chứng minh rằng nếu $x + \frac{1}{x} \in Z$ thì $x^n + \frac{1}{x^n \in Z}$ với mọi số tự nhiên n.

13. Chứng minh rằng với mọi n thuộc N^* : (n + 1)(n + 2)…(n + n) chia hết cho 2^n.

14. Chứng minh rằng $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13.

15. Tìm ba chử số tận cùng của số $3^{2^{2003}}$.

16. Cho p, k, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$n^{p-4k} - n^{p} \vdots 10.$

17. Chứng minh rằng :

a) $1^{2002} + 2^{2002} + ... + 2002^{2002} \vdots 11$.

b) $220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} \vdots 102$

18. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất gồm toàn chử số 9 và chia hết cho các số 3, 7, 11, 13, 17.

Hướng dẫn giải.

1. $a^4 – b^4 = (a^4 – 1) – (b^4 – 1)$

$= (a – 1)(a + 1)(a^2 + 1) – (b – 1)(b + 1)(b^2 + 1).$

2. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3 – x) + b(x^2 – x) + (a + b + c)x + d$

$$= 6a.\frac{x^3 - x}{6} + 2b\frac{x^2 - x}{2} + (a + b + c)x + d$$

Chứng minh : $x^3 – x$ chia hết cho 6 và $x^2 – x$ chia hết cho 2.

3. Từ 20 số đầu tiên của dãy ta tìm được hai số mà chử số hàng đơn vị là 0 và trong hai số đó ít nhất có một số có hai chử số hàng chục khác 9, giả sử đó là số n. Khi đó các số n, n + 1, …, n + 9, n + 19 là 11 số có tổng các chử số là 11 số tự nhiên liên tiếp nên có một số có tổng các chử số chia hết cho 11.

4. $1947 = 33.59$; $46^n + 296.13^n = (46^n – 13^n) + 297.13^n = (46^n + 13^n) + 295.13^n$

5. a)$7^{2n} – 48n – 1 = (49^n – 1) – 48n = 48[(49^{n-1} – 1) + (49^{n-2} – 1) + …+(49 – 1)]$

b) $n^n – n^2 + n – 1 = (n – 1)[(n^{n-1} – 1)+ (n^{n-2} – 1) + …+(n – 1)]$

6. Giả sử f(n) = 0 , $n \in Z$ ta có

$f(n) – f(1) \vdots (n – 1) \Rightarrow n – 1$ lẻ

$f(n) – f(o) \vdots n \Rightarrow n$ lẻ . Vô lí.

7. a) n = 3k + r , r = 0; 1; 2, giả thiết suy ra r = 0

b) xét n = 3k + r, r = 0; 1; 2.

8. $(n – 3)^2 + (n – 2)^2 + (n – 1)^2 + n + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^3 = 7(n^2 + 4)$

Chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 49.

9. Lấy 1002 số 4, 4^2,…, 4^{1001} chia cho 1000.

10. Lấy 2003 số 2003, 20032003, …, 2003…2003 (2004 số 2003) chia cho 2003

11. Lấy 2004 số $2, 2^2,\ldots,2^{2004}$ chia cho 2003

12. $x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^k+\dfrac{1}{x^k}\right)-\left(x^{k-1}+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$

13. Với n = k + 1: (k + 2)(k + 3)…(2k + 2) = 2(k + 1)(k + 2)…(k + k) $\vdots\ 2^{k+1}$

14. $2^6=64\equiv -1(\text{mod } 13);\ 3^3=27\equiv 1(\text{mod } 13)$

15. Tìm hai chử số tận cùng của 2^{2003}

16. $n^{p+4k}-n^p=n^p\left(n^{4k}-1\right)\vdots\, n\left(n^4-1\right)\vdots 10$

17.

$a)\ \text{a}^{11}\equiv a(\text{mod } 11)\Rightarrow \text{a}^{2002}\equiv a(\text{mod } 11)$

$\Rightarrow 1^{2002}+2^{2002}+\ldots+2002^{2002}\equiv 1+2+\ldots+2002=1001.2003\equiv 0(\text{mod } 11)$

b) tự làm\

18. Ta có BCNN(2, 6, 10, 12, 16) = 16.5.3 = 240. Áp dụng định lí Fermat.

CHUYÊN ĐỀ 2: SỐ NGUYÊN TỐ

Để đơn giản vấn đề này, chúng ta xét khái niệm số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên N. Trong tập hợp số tự nhiên, số 0 có vô số ước, đó là tất cả các số tự nhiên khác nó. Số 1 chỉ có một ước duy nhất là chính nó. Còn mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 bao giờ củng có ít nhất hai ước là 1 và chính nó, các ước như thế giọi là ước tầm thường. Chúng ta chỉ quan tâm tới các số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước tầm thường, các số loại này có vai trò quan trọng trong lí thuyết số

A. Lý thuyết

I, Số nguyên tố và hợp số

1/ Định nghĩa:

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước là một và chính nó
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có ước khác 1 và chính nó

Ví dụ:

2, 3, 5, 7, 11….là những số nguyên tố

4, 8, 9, 12… là những hợp số

Chú ý:

- Tập hợp số tự nhiên được chia thành 3 bộ phận

  + {0, 1}

  + Tập hợp các số nguyên tố

  + Tập hợp các hợp số

- Từ định nghĩa ta có : Số tự nhiên $a > 1$ là hợp số nếu $a = pq$, $p > 1$, $q > 1$, hoặc nếu $a = pq$, $1 < p < a$.

2/ Tập hợp các số nguyên tố

a, Định lí 1:

Ước nhỏ nhất lớn hơn 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.

Chứng minh:

Giả sử a là một số tự nhiên lớn hớn 1 và $p > 1$ là ước nhỏ nhất của a. Ta có p là một số nguyên tố.

Thật vậy nếu p không phải là một số nguyên tố thì p là một hợp số, nghĩa là có một số tự nhiên p_1 là ước của p và $1 < p_1 < p$. Từ đó ta có p_1 là ước của a và $1 < p_1 < p$ mâu thuẩn với giả thiết p là ước nhỏ nhất lớn hơn 1 của a.

Chú ý: Định lí trên chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ước nguyên tố.

b, Định lí 2:

Có vô số ước nguyên tố

Chứng minh:

Về mặt lí thuyết, định lí một chứng tỏ rằng tập hợp các số nguyên tố khác rỗng. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1 = 2, p_2, p_3,\ldots, p_n$

Ta xét số $a = p_1p_2\ldots p_n + 1$. Đó là một số tự nhiên lớn hơn 1 nên a có ít nhất một ước nguyên tố q. Nhưng vì chỉ có hữu hạn số nguyên tố đã kể ra ở trên cho nên p phải trùng một trong các số $p_1, p_2, \ldots, p_n$ do đó q phải là ước của tích $p_1p_2\ldots p_n$.

Từ q là ước của $a = p_1p_2\ldots p_n + 1$ và q là ước của $p_1p_2\ldots p_n$.

q là ước của $a - p_1p_2\ldots p_n = 1$. Điều này mâu thuẩn với giả thuyết q là số nguyên tố

Như vậy tập hợp các số nguyên tố là vô hạn nên không thể có một bảng tất cả các số nguyên tố, nếu chúng ta đánh số các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_n < p_{n+1}$,…. Thì cho đến nay người ta củng chưa tìm được một biểu thức tổng quát nào cho số nguyên tố p_n thứ n theo chỉ số n của nó.

II, Các định lí cơ bản:

1/ Các bổ đề

a. Bổ đề 1:

Với số tự nhiên a và số nguyen tố pthì hoặc a nguyên tố với p hoặc a chia hết cho p.

Chứng minh:

Vì p là một số nguyên tố nó chỉ có 2 ước là một và p cho nên ƯCLN(a,p) = 1 hoặc ƯCLN(a,p) = p. Từ đó ta có a nguyên tố với p hoặc a chia hết cho p

b. Bổ đề 2:

Nếu một tích các số tự nhiên chia hết cho số nguyên tố p thì phải có ít nhất một thừa số của tích chia hết cho p.

Chứng minh:

Giả sử tích $a_1a_2\dots a_n$ chia hết cho p, ta phải có ít nhất một trong các số $a_1, a_2,\dots,a_n$ chia hết cho p . Thật vậy giả sử trái lại rằng tất cả các số $a_1, a_2,\dots,a_n$ không chia hết cho p thì theo bổ đề 1 chúng đều là nguyên tố với p do đó ta có ƯCLN($a_1a_2\dots a_n$,p) = 1. Điều này mâu thuẩn với giả thiết.

c. Hệ quả:

Nến số nguyên tố p là ước của một tích các số nguyên tố $q_1q_2\dots q_n$ thì p phải trùng với một trong các số nguyên tố của tích đó.

2/ Định lí cơ bản:

Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các thừa số

Chứng minh:

a. Sự phân tích được:

Giả sử $a \in N, a > 1$, khi ấy a có ít nhất một ước nguyên tố p_1 nào đó và ta có a = p_1a_1

- Nếu $a_1 = 1$ thì a = p_1 là sự phân tích của a thành tích (có một thừa số) những số nguyên tố.
- Nếu $a_1>1$ thì lại theo định lí ở trên, a_1 có ước nguyên tố p_2 nào đó và ta có $a_1 = p_2a_2$ nên a = $p_1p_2a_2$
- Nếu $a_2 = 1$ thì a = p_1p_2 là sự phân tích của a thành tích những thừa số nguyên tố.
- Nếu $a_2>1$ thì lại tiếp tục lí luận ơ trên có số nguyên tố $p_3,\dots$Quá trình này ắt phải có kết thúc, nghĩa là có n sao cho $a_n = 1$, $a_{n-1} = p_n$ là một số nguyên tố, bởi vì ta có a, a_1, $a_2,\dots$ là những dãy số tự nhiên mà $a > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ như vậy cuối cùng ta được a = $p_1p_2\dots p_n$. Là sự phân tích của a thành những thừa số nguyên tố.

b. Tính duy nhất:

Giả sử ta có a = $p_1p_2\dots p_n = q_1q_2\dots q_n$ là hai dạng phân tích số tự nhiên a thành thừa số nguyên tố. Đẳng thức trên chứng tỏ p_1 là ước của $q_1q_2\dots q_n$ nên theo bổ đề 2 ở trên p_1 trùng với q_i nào đó($1 \le i \le m$) vì ta không kể đến thứ tự của các thừa số nên có thể coi $p_1 = q_1$ và từ đó ta được

$$p_2\dots p_n = q_2\dots q_n$$

Lấy p_2 và lập lại lí luận trên ta được $p_2 = q_2$

Lí luận lặp lại cho đến lúc ở một vế không còn thứa số nguyên tố nào nữa, nhưng lúc đó ở vế còn lại củng không còn thừa số nguyên tố nào vì ngược lại sẻ xãy ra

Hoặc $1 = q_{n+1}q_{n+2}\ldots q_n$

Hoặc $p_{m+1}p_{m+2}\ldots p_m = 1$

Là không thể được. Vậy phải có m = n và $p_i = q_i$ i = 1, 2, 3,…n nghĩa là tính duy nhất ở dạng phân tích số a thành tích các thừa số nguyên tố đã được *chứng minh*

Ví dụ: phân tích 1960 thành tích những thừa số nguyên tố

Trong thực hành ta thực hiện quá trình phân tích trong phép chứng minh định lí trên bằng cách tìm các ước nguyên tố của a = 1960 từ nhỏ đến lớn. Ta viết như sau:

$$\begin{array}{r|l} 1960 & 2 \\ 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Vậy $1960 = 2.2.2.5.7.7 = 2^3.5.7^2$

Chú ý:

- Bằng cách phân tích 1 số ra thừa số. Ta có thể tìm được tất cả các ước của số ấy mọt cách nhanh,không bỏ sót ước nào.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu một số A có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố lá $A = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}...a_n^{n}$ trong đó $a_1, a_2,\ldots,a_n$ là các số nguyên tố, thì các ước của A là $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$ ta có thể sử dụng điều này để kiểm tra xem khi tìm các ước của một số, ta đã tìm đủ số các ước chưa.
- Thông thường , khi viết các phân tích ra thừa số nguyên tố của một số, bao giờ ta củng viết nó dưới dạng tiêu chuẩn, tức là dạng ma trong đó các thừa số nguyên tố được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.
- Phân tích ra thừa số nguyên tố của một số chính phương thì chỉ chứa các thứa số nguyên tố với số mũ chẵn.

B: Các dạng toán :

DẠNG 1: ƯỚC CỦA MỘT SỐ

$A = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}...a_n^{n}$ ($a_1, a_2,\ldots,a_n$: các số nguyên tố)

Số ước của A là $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$

Bài 1:

1. Tìm các ước nguyên tô của các số 30, 210, 2310

2. chứng tỏ rằng các số 31, 211, 3201, 10031 là các số nguyên tố

giải

1.Phân tích các số đã cho thành tích các thừa số nguyên tố

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2310 & 2 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Ta có:

- Ước nguyên tố(30) = {1, 2, 3, 5}

  Và 30 = 1.2.3.5

- Ước nguyên tố(210) = {1, 2, 3, 5,7}

  Và 210 = 1.2.3.5.7

- Ước nguyên tố(2310) = {1, 2, 3, 5, 7, 11}

  Và 30 = 1.2.3.5.7.11

Chú ý: Khi phân tích số 210 ra thừa số nguyên tố ta có thể làm như sau :

210 = 21.10 . Ta đã biết 10 = 2.5 nên chỉ cần phân tích 21 = 3.7 và có

210 = 2.7.2.5

Cách này hoàn toàn có lợi khi phân tích các số là bội của 10

Chẳng hạn khi phân tích số 3200 ta viết

3200 = 32.100 cho ta 32 = 2^5 và 100 = $2^2.5^2$

Vậy 3200 = $2^7.5^2$

2. Dể thấy 31 = 30 + 1

= 1.2.3.5 + 1

Số 31 không chia hết các số nguyên tố 2, 3, 5 ma $5^2 = 25 < 35$ là ước nguyên tố lớn nhất mà $5^2 < 31$

Suy ra 31 là số nguyên tố

Các số khác ta củng chứng minh tương tự.

Bài 2:

1**. Phân tích số 360 ra thừa số nguyên tố.**

2. Số 360 có bao nhiêu ước.

3. Tìm tất cả các ước của 360.

Giải.

1. Ta có:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Vậy $360 = 2.2.2.3.3.5$

$= 2^3.3^2.5$

2.Ta có $360 = 2^3.3^2.5$

Vậy số các ước của 360 là

$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ ước

3. Dể thấy các số $1, 2, 2^2, 2^3,$ (1) là ước của 360

Ta tìm các ước còn lại theo cách sau

Bước 1: Nhân các số hạng dãy (1) theo thứ tự với 3 và 3^2 ta được các ước

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2.3 & 2^2.3 & 2^3.3 \\ 3^2 & 2.3^2 & 2^2.3^2 & 2^3.3^2 \end{array}$$

Bước 2: Nhân các số trong dãy (1) và (2) theo thứ tự với 5 ta đước các ước

$$\begin{array}{cccc} 5 & 2.5 & 2^2.5 & 2^3.5 \\ 3.5 & 2.3.5 & 2^2.3.5 & 2^3.3.5 \\ 3^2.5 & 2.3^2.5 & 2^2.3^2.5 & 2^3.3^2.5 \end{array}$$

Vậy ta có tất cả 24 ước của 360 là

1	2	4	8	3	6	12	24
9	18	36	72	5	10	20	40
15	30	60	120	45	90	180	360

Bài 3:

Tìm số nhỏ nhất A có

1. **6 ước**
2. **9 ước**

Giải

1. Viết A dưới dạng phân tích ra thừa số nguyên tố

$A = a^m.b^n.c^t\ldots$

Số các ước của A sẻ là $(m + 1)(n + 1)(t + 1)\ldots$

Ta có $6 = 6.1$ hoặc $6 = 2.3$

- Trường hợp A chỉ có một số nguyên tố dạng $A = a^m$ thì

$m+1=6 \Rightarrow m=5 \Rightarrow A=a^5$

Vì A là số nhỏ nhất hay a = 2. Suy ra

$A=a^5=2^5 \Rightarrow A=32$

- Trương hợp A có hai thừa số nguyên tố $A = a^m.b^n$

Ta có $\begin{cases} m+1=3 \\ n+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

Và $A = a^2.b^1$

Để có số A nhỏ nhất ta chọn các số nguyên tố nhỏ nhất là a = 2, b = 3

Vậy $A = 2^2.3$ hay A = 12

Xét 2 trường hợp trên ta thấy số tự nhiên nhỏ nhất có 6 ước là 12

2. Đáp số : 36.

Bài 4:

Chứng tỏ rằng các số sau đây là hợp số

1. **676767**

2. $\mathbf{10^8 + 10^7 + 7}$

3. $\mathbf{17^5 + 24^4 + 13^{21}}$

Giải.

1. Số 676767 có tổng các chử số là 39 chia hết cho 3 nên $676767 \vdots 3$

Vậy nó là hợp số

2. Tương tự số $10^8 + 10^7 + 7$ có tổng chia hết cho 9 nên

$10^8 + 10^7 + 7 \vdots 9$ là hợp số

3. Số $17^5 + 24^4 + 13^{21}$ có:

Số 17^5 có tận cùng là 7

Số 24^4 có tận cung là 6

Số 13^{21} có tận cùng là 3

Vậy $10^8 + 10^7 + 7$ có tận cùng là 0, chia hết cho 10 nên nó là hợp số.

Bài 5:

Các số sau là nguyên tố hay hợp số

1. **A = 11…1 (2001 chử số 1)**

2. **B = 11…1 (2000 chử số 1)**

3. **C = 1010101**

4. **D = 1112111**

5. **E = 1! + 2! + 3! +…+ 100!**

6. **G = 3.5.7.9 – 28**

7. **H = 311141111**

Giải.

1. $A \vdots 3$. Hợp số

2. $B \vdots 11$. Hợp số

3. $C \vdots 101$. Hợp số

4. D = 1112111 = 1111000 + 1111

$\Rightarrow D \vdots 1111$. Hợp số

5 E = 1! + 2! + 3! + … + 100!

$1! + 2! = 3 \vdots 3$

$3! = 1.2.3 \vdots 3$

$\vdots$

$100! = 1.2.3....100 \vdots 3$

Suy ra $E \vdots 3$. Vậy E là hợp số

6. G chia hết cho 7.G là hợp số

7. H = 311141111 = 31111000 + 31111

$\Rightarrow H \vdots 31111$. Vậy H là hợp số.

Bài 6:

Cho 3 số a = 720, b = 36, c = 54

1. Gọi A, B, C theo thứ tự là tập hợp các ước nguyên tố của a, b, c. Chướng tỏ B, C là tập con của A

2. a có chia hết cho b, có chia hêt cho c không

Giải.

1. Ta thấy a = 720 = $2^4.3^2.5$

b = 36 = $2^2.3^2$

c = 54 = 2.3^3

vậy A = {2, 3, 5}, B = {2, 3}, C = {2, 3}

Dễ thấy B, C là hai tập con của A

2. Vì a = $2^4.3^2.5$ và b = $2^2.3^2$ nên $a \vdots b$

Vì a = $2^4.3^2.5$ và c = 2.3^3 nên a không chia hêt cho c

Bài 7:

Đố vui: Ngày sinh nhật của bạn

Một ngày đầu năm 2002. Huy viết thư hỏi thăm sinh nhật Long và nhận được thư trả lời.

Mình sinh ngay a tháng b, năm 1900 + c và đến nay d tuổi . Biết rằng a.b.c.d = 59007

Huy đã kịp tính ra ngày sinh của Long và kịp viết thư sinh nhật bạn. Hỏi Long sinh ngày nào

Giải.

Ta có:

a.b.c.d = 59007

c +d = 102

$1 \le a \le 31$, $1 \le b \le 12$

Phân tích ra thừa số nguyên tố a.b.c.d = 3.13.17.89

Trông các ước của abcd chỉ có hai số 13 và 89 có tổng bằng 102. Tuổi của Long không thể là 89 vậy d = 13, c = 89

Còn lại a.b = 3.17 do $b \le 12$ nên b = 3, a = 17

Vậy long sinh ngày 17 – 3 – 1989 .

Bài 8:

Chứng minh rằng:

1. **Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng** $4n \pm 1$
2. **Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng** $6n \pm 1$

Giải.

1. Khi chia một số tự nhiên A lớn hơn 2 cho 4 thì ta được các số dư 0, 1, 2, 3 . Trường hợp số dư là 0 và 2 hai thì A là hợp số, ta không xét chỉ xét trường hợp số dư là 1 hoặc 3

Với mọi trường hợp số dư là 1 ta có A = $4n \pm 1$

Với trường hợp số dư là 3 ta có A = $6n \pm 1$

Ta có thể viết A = 4m + 4 – 1

= 4(m + 1) – 1

Đặt m + 1 = n, ta có A = 4n – 1

2. Khi chia số tự nhiên A cho 6 ta có các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5. Trường hợp số dư 0, 2, 3, 4. Ta có A chia hết cho 2 hoặc A chia hết cho 3 nên A là hợp số

Trường hợp dư 1 thì A = 6n + 1

Trường hợp dư 5 thì A = 6m + 5

= 6m + 6 – 1

6(m + 1) – 1

Đặt m + 1 = n   Ta có A = 6n – 1

DẠNG 2: SỐ NGUYÊN TỐ VÀ TÍNH CHIA HẾT

1. Nếu tích của hai số a, b chia hết cho một số nguyên tố p thì mọt trong hai số a, b chia hết cho p

$$a.b \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$$

2. Nếu a^n chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hêt cho p

$$a^n \vdots p \Rightarrow a \vdots p$$

Bài 1:

Phân tích A = 26406 ra thừa số nguyên tố. A có chia hết các số sau hay không 21, 60, 91, 140, 150, 270

Giải.

Ta có A = 26460 = $2^2.3^3.5.7^2$

Ta củng có 21 = 3.7

$60 = 2^2.3.5$

91 = 7.13

$140 = 2^2.5.7$

$150 = 2.3.5^2$

$270 = 2.3^3.5$

Vậy A chia hết cho 21, 60, 140

A không chia hêt cho 91, 150, 270.

Bài 2:

Chứng tỏ rằng nếu 3 số a, a + n, a + 2n đều là số nguyên tố lớn hơn 3 thì n chia hết cho 6.

Giải.

Chú ý rằng , các số nguyên tố (trừ số 2) đều là các số lẽ

- Nếu n lẽ thì n + a là số chẵn là một hợp số trái với giả thiết n + a là số nguyên tố. vậy n là số chẳn

- Ta đặt n = 2k, $k \in N^*$

+ Nếu k chia hết cho 3 thì n chia hết cho 6

+ Nếu k = 3p + 1 , $p \in N^*$ thì 3 số theo thứ tự bằng a, a + 6p + 2,

a + 12p + 4

+ Do a là số lẽ nên nếu a chia cho 3 dư 1 thì a + 6p + 2 chia hết cho 3,

Nếu a chia 3 dư 2 thì a + 12p + 4 chia hết cho 3

+ Nếu k = 3p + 2 $p \in N^*$ thì 3 số theo thứ tự bằng

a, a + 6p +4, a + 12p +8

với a chia cho 3 dư 1 thì a + 12p +8 chia hết cho 3

với a chia cho 3 dư 2 thì a + 6p +4 chia hêt cho 3

Vậy để 3 số a, a + n, a + 2n đều là số nguyên tố thì n phải chia hêt cho 6.

<u>Bài 3:</u>

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p – 1)(p + 1) chia hết cho 24

<u>Giải.</u>

Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$ mà (p, 3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)\vdots 3$ (1)

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẽ, p – 1 và p + 1 là hai số chẳn liên tiếp , có một số là bội của 4 nên tích của chúng chia hết cho 8 (2)

Từ (1) và (2) suy ra (p – 1)(p + 1) chia hết cho 2 nguyên tố cùng nhau là 3 và 8

Vậy (p – 1)(p + 1) chia hết cho 24.

<u>Bài 4:</u>

Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1 \qquad (n \geq 1)\ n \geq 1$$

<u>Giải.</u>

Ta có

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\frac{(n^2+n)(n+2)+6}{6}$$

$$=\frac{n^3+2n^2+2n+6}{6}=\frac{(n+2)(n^2+2)}{6}=P$$

Với $n \geq 4$ thì n + 3 > 6 và n^2 + 2 > 17. Trong hai số n + 3 và n^2 + 2 hoặc có một số chia hết cho 6 hoặc một số chia hết cho 2, và một số chia hết cho 3 thì p sẽ là hợp số

Thực vậy :

- Với n = 3k thì $(n + 3)(n^2 + 2) = 27k^2(k + 1) + 6(k + 1) ⋮ 6$
- Với n = 3k + 1 thì $(n + 3)(n^2 + 2) = 27k^3 + 54k^2 + 33k\ 12$

$$= BC\ 6 + 3k(k^2 + 1)$$

- Với n = 3k – 1 thì $(n + 3)(n^2 + 2) = BC\ 6 + 3k(k^2 + 1)$

Mà $3k(k^2 + 1) ⋮ 6$ nên với mọi $n \geq 1$ thì p đều là hợp số

Còn lại n = 1 thì p = 2

n = 2 thì p = 5

n = 3 thì p = 11

Đó là các số nguyên tố p cầc tìm.

Bài 5:

Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau củng là số nguyên tố

1. **p + 10, p + 14**
2. **p + 2, p + 6, p + 8 , p + 12, p + 14**

Giải.

1. Vì p là số nguyên tố và p + 10 và p + 14 cũng là số nguyên tố nên p > 2 .Mặt khác p có thể rơi vào một trong 3 khả năng hoặc p = 3k , p = 3k + 1

p = 3k – 1

- Với p = 3k + 1 thì

p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5) ⋮ 3

- Với p = 3k – 1 thì

p + 10 = 3k + 9 = 3 (k + 3) ⋮ 3

Vậy p = 3k . Do p là nguyên tố nên p = 3

2. Xét các trường hợp sau.

- Với $p = 5$ thì $p + 2 = 7$

$p + 6 = 11$

$p + 8 = 13$

$p + 12 = 17$

$p + 14 = 19$

- Với $p > 5$ thì $p = 5k +1$, $p = 5k + 2$, $p = 5k + 3$, $p = 5k +4$

+ Nếu $p= 5k +1$ thì $p + 14 = 5k + 15 \vdots 5$

+ Nếu $p = 5k + 2$ thì $p + 8 = 5k + 10 \vdots 5$

+ Nếu $p = 5k + 3$ thì $p + 12 = 5k + 15 \vdots 5$

+ Nếu $p = 5k +4$ thì $p + 6 = 5k + 10 \vdots 5$

Suy ra nguyên tố cần tìm là $p = 5$.

Bài 6:

Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai sô nguyên tố lẽ liên tiếp (p > 3). Chứng minh rằng một số tự nhiên nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

Giải

Gọi hai số nguyên tố sinh đội là p và $p + 2$. Vậy số tự nhiên nằm giữa chúng là $p + 1$

- p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ vậy $p + 1$ là số chẳn

$p + 1 \vdots 2$ (1)

- $p, p + 1, p + 2$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Mà p và $p +2$ là số nguyên tố nên không chia hêt cho 3 ,vậy

$p + 1 \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) : $(2, 3) = 1$ suy ra $p + 1 \vdots 6$ (đpcm)

Bài toán có thể mở rông thành :

Chứng minh rằng và $p + 2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng

Của chúng chia hết cho 12.

Bài 7:

Một số nguyên tốp chia hêt cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r

Giải

Ta có p =42k + r = 2.3.7.k + r $\left(k, r \in N, \quad 0 < r < 42\right)$

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 29

Loại đi các sô chia hết cho 3, cho 7 chỉ con 25

Vậy r = 25.

Bài 8:

Điền các chử số thích hợp trong phép phân tích ra thừa số nguyên tố

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fcga} & n \\ \overline{abc} & c \\ \overline{ncf} & \end{array}$$

Giải.

Ta có:

$$\overline{abcd} = e.n.\overline{abc}$$
$$\Rightarrow e.n = \frac{\overline{abcd}}{\overline{abc}} = 10$$
$$\Rightarrow e, n \in \{2, 5\}$$
$$\overline{ncf}.c = \overline{abc} \Rightarrow n.c \le 9 \Rightarrow n, c \in \{2, 3\}$$

Suy ra n = 2 do đo e = 5, c = 3

Vì $\overline{fcga}.5 = \overline{abcd}$ nên f = 1

Vậy $\overline{ncf} = 231, \quad \overline{abcd} = \overline{ncf}.c.n.e$

$$= 231.3.2.5 = 6930$$

Ta được

6930	5
1386	2
693	3
231	

Bài 9:

Tìm số tự nhiên có 4 chử số, chứ số hàng nghìn bằng chử số hàng đơn vị, chử số hàng trăm bằng chử số hàng chục và số đố viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

Giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là n, theo đề bài chử số hàng nghin bằng chử số hàng đơn vị, chử số hàng trăm bằng chử số hàng chục vậy n có dạng $\overline{abba}$

Có $\overline{abba} \vdots 11$ mà $\overline{abba}$ là tích của 3 số nguyên tố liên tiếp nên một trông các số nguyên tố này phải là 11

Xét các tích

5.7.11 = 385 (loại)

7.11.13 = 1001 (đúng)

11.13.17 = 2431 (loại)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 1001.

Bài 10:

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố (n > 2) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Giải.

Xét số $A = (2^n - 1)2^n(2^n + 1)$

A là tích của 3 số tự nhiên liên tiệp nên $A \vdots 3$

Mặt khác $2^n - 1$ là số nguyên tố (theo giả thiết)

2^n không chia hết cho 3

Vậy $2^n + 1$ phải chia hết cho 3 $\Rightarrow$ $2^n + 1$ là hợp số.

Bài 11:

Tìm số tự nhiên k để dãy k + 1, k + 2,…,k + 10 chứa nhiều số nguyên tố nhất .

Giải.

Với k = 0 ta có dãy 1, 2, 3,…,10 chứa 4 số nguyên tố 2, 3, 5, 7

Với k = 1 ta có dãy 2, 3, 4,…, 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11

Với k = 2 ta có dãy 3, 4, 5,…, 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11

Với $k \geq 3$ dãy k + 1, k + 2,…,k + 10 chứa 5 số lẽ liên tiếp, dãy số này đều lớn hơn 3 nên có một số chia hết cho 3, trong dãy có 5 số chẵn hiễn nhiên không phải là số nguyên tố nếu $k \geq 3$

Vậy k = 1 thì dãy k + 1, k + 2,…,k + 10 chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 12 :

1. Chứng minh rắng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao

2. chứng minh rằng nếu tổng của n luỹ thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n, 30) = 1

Giải.

1.Giả sử p là số nguyên tố và p = 30k + r (0 < r < 30)

Nếu r là hợp số thì r co ước nguyên tố $q \leq \sqrt{30} \Rightarrow$ q = 2, 3, 5

Nhưng với q = 3, 3, 5 thì p lần lượt chia hết cho 2, 3, 5 vô lí . Vậy r = 1 hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa

Chẳng hạn p = 109 = 60.1 + 49 (49 là hợp số)

2. Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Với r = 1, 11, 19, 29 thì $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$

Với r = 7, 13, 17, 23 thì $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$

Suy ra $p^4 \equiv 1 \pmod{30}$

Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số nguyen tố lớn hơn 5

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + ... + p_n^4 \equiv n \pmod{30}$

Suy ra p = 30k + n là số nguyên tố nên (n, 30) = 1

Bài 13:

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố

Giải.

Với p = 2 ta co $2^p + p^2 = 12$ không là số nguyên tố

Với p = 2 ta có $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố

Với p > 3 ta có $p^2 + 2^p = (p^2 – 1) + (2^p + 1)$

Vì p lẽ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 – 1$ chia hết cho 3 và $2^p + 1$ chia hết cho 3. Do đó $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với p = 3 thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 14:

Tìm tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho abc < ab + bc + ca

Giải.

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$ khi đó

$$ab + bc + ca \le 3bc$$
$$\Rightarrow abc \le 3bc$$
$$\Rightarrow a \le 2 \Rightarrow a = 2$$

(vì a là số nguyên tố)

Với a = 2 ta có

$$2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b+c) \le 4c$$
$$\Rightarrow b < 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

- Nếu b = 2 thì 4c < 2 + 4c thoả mãn với c là nguyên tố bất kì
- Nếu b = 3 thì 6c < 6b + 5c suy ra c < 6 vậy c = 3 hoặc c = 5

Vậy các cạp số (a, b, c) càn tìm là (2, 2, p) ; (2, 3, 3) ; (2, 3, 5) và các hoán vị vủa chúng , voi p là số nguyên tố .

DẠNG 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.

Bài 1:

Tìm $n \in N^*$ sao cho : $n^3 – n^2 + n – 1$ là số nguyên tố

Giải.

Ta có :

$$A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^3 - n) + (n-1)$$
$$\Leftrightarrow A = n^2(n-1) + (n-1)$$
$$\Leftrightarrow A = (n^2+1)(n-1), \qquad n \in N^*$$

Nếu n = 1 suy ra A = 0

Nếu n = 2 suy ra A = 5 là số nguyên tố

Nếu n>2 thì A là tích của hai thừa số mà mỗi thừa số đều lớn hơn hai . Vậy A là hợp số

Vậy để A = $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố thì n = 2.

Bài 2:

Tìm 2 số tự nhiên , sao cho tổng và tích của chúng đều là số nguyên tố

Giải.

Tích của hai số tự nhiên là số nguyên tố nên một số là 1 , số còn lại kí hiệu là a là số nguyên tố

Theo đề bài 1 + a củng là số nguyên tố. Xét hai trường hợp:

- Nếu 1 + a là số lẽ thì a là số chẵn. Do a là số nguyên tố nên a =2
- Nếu 1 + a la số chẵn thì 1 + a = 2 vì 1 + a là số nguyên tô . Khi đó a= 1 không là số nguyên tố (loại)

Vậy hai số tự nhiên phải tìm 1 và 2

Bài 3:

Tìm các số nguyên tố a, b, c thoả mãn điiêù kiện

abc = 3(a + b + c)

Giải.

Từ abc = 3(a + b + c) suy ra a chia hết cho 3 hoạc b chia hết cho 3 hoặc c chia hết cho 3. Vậy

$$3bc = 3(3 + b + c)$$
$$\Leftrightarrow bc = 3 + b + c$$
$$\Leftrightarrow b + c - bc = 3$$
$$\Leftrightarrow b - bc + c$$
$$\Leftrightarrow b - bc + c + 1 = 4 \Leftrightarrow (b-1)(c-1) = 4$$

Do b và c là các sốnguyên tố $b-1\geq 1$, $c-1\geq 1$ và b – 1 , c – 1 là ước của 4 vậy chúng nhận 1 trông các giá trị là 1, 2, 4. Vậy ta có các trường hợp sau:

Hoạc $\begin{cases} b-1=4 \\ c-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=2 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} b-1=1 \\ c-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=5 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} b-1=2 \\ c-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}$

Các cặp số (a, b, c) phải tìm là : (3, 3, 3) ; (3, 2, 5) ; (3, 5, 2) ; (5, 3, 2) ; (5, 2, 3) ; (2, 3, 5) ; (2, 5, 3)

<u>Bài 4:</u>

1. **Tìm số nguyên tố a biết rằng 2a + 1 là lập phương của một số nguyên tố**
2. **Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên**

<u>Giải</u>.

1.Với a = 2 ta có 2a + 1 = 5 không thích hợp

Với $a\neq 2$ do a là số nguyên tố nên a lẽ

Vậy 2a + 1 là lập phương của một số lẽ nghĩa là

$$2a+1=(2k+1)^3$$
$$\Leftrightarrow 2a+1=8k^3+12k^2+6k+1$$
$$\Leftrightarrow a=k\left(4k^2+6k+3\right)$$

Từ đó k là ước của a. Do k là số nguyên tố nên k = 1 hoặc k = a

- Nếu k = 1 thì 2a + 1 = $(2.1 + 1)^3$ suy ra a = 13 thích hợp
- Nếu a = k từ a = a($4a^2$ + 6a + 3) do a là nguyên tố nên suy ra

1 = $4a^2$ + 6a + 3 không có số nguyên tố a nào thoả mãn phương trình này vì vế phải luôn lớn hơn 1

Vậy a = 13

2.Giả sử $13p+1=n^3$ $(n\in \mathbb{N}^*)$, $p\geq 2\Rightarrow n\geq 3$

$$13p+1=n^3$$
$$\Leftrightarrow 13p=n^3-1$$
$$\Leftrightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1)$$

13 và p là các số nguyên tố , mà n – 1 > 1 và n^2 + n + 1 > 1

Nên n – 1 = 13 hoặc n – 1 = p

- Với n – 1 =13 thì n = 14 khi đó 13p = n^3 – 1 = 2743 suy ta p = 211 là số nguyên tố
- Với n – 1 = p thi n^2 + n + 1 = 13 suy ra n = 3 . Khi đó p = 2 là số nguyên tố

Vậy p = 2, p = 211 thì 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên

Bài 5:

Tìm tất cả các số có hai chử số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyen tố

Giải.

Vì a, b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b

Giả sử $\frac{ab}{a-b}=p$, với p là số nguyên tố

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right. \Rightarrow p \in \{2,3,5,7\}$

Ta có :

$$\frac{ab}{a-b}=p$$
$$\Leftrightarrow ab=pa-pb$$
$$\Leftrightarrow (p+a)(p-b)=p^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+p=p^2 \\ p-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=p^2-p \\ b=p-1 \end{cases}$$

- Với p = 2 ta có $\left[\begin{array}{l} \overline{ab}=21 \\ \overline{ab}=12 \end{array}\right.$
- Với p = 3 ta có $\left[\begin{array}{l} \overline{ab}=62 \\ \overline{ab}=26 \end{array}\right.$

- Với p = 5 hoặc p = 7 ta có a có hai chử số (loại)

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 21, 12, 62, 26

Bài 6:

Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^y + 1 = z$

Giải.

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \geq 2, y \geq 2 \Rightarrow z \geq 5,$ $z \geq 5$ vậy z là số nguyên tố lẽ

$$x^y + 1 = z \Rightarrow x^y = z - 1$$

Suy ra x^y là số chẵn vậy x = 2 khi đó $z = 2^y + 1$

Nếu y lẽ thì $2^y \equiv 2$ (mod 3)

$\Rightarrow 2^y + 1 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3$ (vô lí vì z là nguyên tố)

Vậy y chẵn , suy ra y = z

$z = 2^2 + 1 = 5$

Vậy các số nguyên tố cần tìm là x = y = z , z = 5

Bài 7:

Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ và hợp số với n > 1

Giải.

Xét các trường hợp chẵn

- n chẵn thì A chia hết cho 2
- n lẽ đặt n = 2k + 1 $\left(k \in N^*\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}
A = n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k+1} \\
&= \left(n^2 + 2^{2k+1}\right)^2 - 2.n^2\, 2^{2k+1} \\
&= \left(n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1}\right)\left(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}\right) \\
&= \left[\left(n - 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]\left[\left(n + 2^k\right)^2 + 2^{2k}\right]
\end{aligned}$$

A phân tích được tích của 2 thừa số vậy A là hợp số .

Bài 8:

Tìm $n \in N^*$ để

1. **$n^4 + 4$ là số nguyên tố.**

2. **$n^{2003} + n^{2002} + 1$ la số nguyên tố**

Giải.

1.Ta có

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2$$
$$= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$$
$$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

Vì $n^4 + 4$ là số nguyên tố nên $n^2 + 2 - 2n = 1$ hoặc $n^2 + 2 + 2n = 1$

Mà $n^2 + 2 + 2n > 1$ vậy $n^2 + 2 - 2n = 1$ suy ra $n = 1$

Thử lại : $n = 1$ thì $1^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố

Vậy với $n = 1$ thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố./

2.Ta có :

$$n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$$

Với $n > 1$ ta có :

$$n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1$$

Do đó $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^2 + n + 1$

Mà $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số

Với $n = 1$ ta có

$$n^{2003} + n^{2002} + 1 = 1^{2003} + 1^{2002} + 1 = 3$$ là số nguyên tố .

Bài 9:

Chứng minh rằng trong 15 số tự nhiên lớn hơn 1 không vượt quá 2004 và đôi một nguyên tố cùng nhau tìm được một số là số nguyên tố.

Giải .

Giả sử $n_1, n_2, \ldots n_{15}$ là các số thoả mãn yêu cầu bài toán. Giả sử tất cả chúng là hợp số. Gọi p_i là ước nguyên tố nhỏ nhất của n_i ($i = 1, 2, \ldots, 15$).

Gọi p là số lớn nhất trong các số $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$

Do các số $n_1, n_2, \ldots n_{15}$ là đôi nguyên tố cùng nhau nên các số $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ khác nhau tất cả.

Số nguyên tố thứ 15 là số 47 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47) ta có $p \geq 47$. Đối với số n có ước nguyên tố nhỏ nhất là p thì $p \leq \sqrt{n}$ suy ra $n \geq p^2 \geq 47^2 > 2004$ (vô lí)

Vậy trong 15 số $n_1, n_2, \ldots n_{15}$ ta tìm được một số nguyên tố./

Bài 10:

Tìm số nguyên tố $\overline{abcd}$, sao cho $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ là số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$

Giải.

Vì $\overline{abcd}$, $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ là số nguyên tố nên là số lẽ hay b, c, d, lẽ và khác 5 . Ta có:

$$b^2 = \overline{cd} + b - c$$
$$\Leftrightarrow b^2 - 1 = 10c + d - c$$
$$\Leftrightarrow b(b-1) = 9c + d \geq 10$$
$$\Rightarrow b \geq 4$$

Suy ra b = 7 hoặc b = 9

- Với b = 7 . Ta có :

$9c + d = 42 \Rightarrow d \vdots 3$ suy ra d = 3 hoặc d = 9

+ Nếu d = 3 thì $c = \frac{39}{9} \notin N$ (loại)

+ Nếu d = 9 thì $c = \frac{33}{9} \notin N$ (loại)

- Với b = 9 thì $9c + d = 72 \Rightarrow d = 9, c = 7$

$\overline{a9}$ và $\overline{a7}$ là số nguyên tố thì a = 1

Vậy số $\overline{abcd} = 1979$ thoả mãn yêu cầu bài toán

C. Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

2. Cho $n \in N^*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) A = $2^{2^{2n+1}} + 3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}} + 7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}} + 13$.

3. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

4. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

6. Tìm các số $x, y \in N*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

7. Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay số lẻ.

8. Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó.

9. Tìm 4 số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

10. Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 hay không.

11. Tìm số nguyên tố có 3 chữ số , biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên

12. Tìm một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết r không là số nguyên tố

Hướng dẫn giải.

1 . n = 3.

2. Chứng minh $A \vdots 7, B \vdots 11, C \vdots 29$.

3. 240 = 2^4.3.5

4. n = 6k + 4 $k \in N^*$

5. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk – 1)(p – 1), $k \in N^*$

6.

$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$ $x = y = 1$ thì $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố.

7. Trong 25 số nguyên tố (từ 2 đến 97) có một số chẵn duy nhất, còn 24 số kia là số lẻ. Do đó tổng của 25 số là số chẵn.

8. Trong 3 số nguyên tố có tổng bằng 1012, phải có một số chẵn, là số 2, đó là số nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố trên.

9. Bốn số đó là 2, 3, 5, 7.

10. Tổng của hai số nguyên tố bằng 2003, là số lẻ, nên một trong hai số phải là 2. khi đó số kia là 2001, là hợp số. Vậy không tồn tại hai số nguyên tố có tổng bằng 2003.

11. Xét số có 3 chử số là lập phương của một số tự nhiên, đó là 125, 126, 343, 512, 729 chỉ có số 125 thoả mãn bài toán (521 là số nguyên tố)

CHUYÊN ĐỀ 3: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

Số chính phương là một số bằng bình phương của một số tự nhiên

Ví dụ : $3^2 = 9$

$15^2 = 225$

Các số 9, 225 là bình phương các số tự nhiên 3, 15 được gọi là số chính phương

II. Tính chất

1, Số chính phương chỉ có thể tận cùng băng 0, 1, 4, 5, 6, 9 không thể tận cùng bằng 2, 3, 7, 8

2, Một số chính phương có chử số tận cùng là 5 thì chử số hàng chục là 2.

Thật vậy, giả sử $M = \overline{a5}^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 15$ vì chử số hàng chục của $100a^2$ và 100a là chử số 0 nên chử số hàng chục của M là 2.

3, Một số chính phương có chử số hàng đơn vị là 6 thì chử số hàng chục của nó là số lẽ.

Thật vậy, giả sử số chính phương $N = a^2$ có chử số tận cùng là 6 thì chử số hàng đơn vị của số a chỉ có thể 4 hoặc 6.

Giả sử hai chử số tận cùng của số a là $\overline{b4}$ (nếu là $\overline{b6}$ thì chứng minh tương tự) khi đó :

$$\overline{b4}^2 = (10b+4)^2$$
$$= 100b^2 + 80b + 16$$

Vì chử số hàng chục của số $100b^2$ là 80b là số chẵn nên chử số hàng chục của N là số lẽ

4, Khi phân tích ra thừa số nguyên tố , số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa thừa số với số mũ lẽ

Thật vậy, giả sử $A = k^2$ và $k = a^x b^y c^z\ldots$(a, b, c là số nguyên tố) thì

$A = (a^x b^y c^z\ldots)^2 = a^{2x} b^{2y} c^{2z}\ldots$

Từ tính chất này suy ra:

- Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4

- Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9
- Số chính phương chia hết cho 5 thì phải chia hết cho 25
- Số chính phương chia hết cho 8 thì phải chia hết cho 16

5, Số lượng các ước của một số chính phương là số lẽ. Đảo lại một số có số lượng các ước là số lẽ thì số đó là số chính phương

Thật vậy , nếu A = 1 thì A là số chính phương có 1 ước . Ta giả sử số A > 1 có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là $A = a^x b^y c^z$… thì số lượng ước của nó bằng (x + 1)(y + 1)(z + 1)…

a, Nếu A là số chính phương thì x, y, z …chẵn nên x + 1, y + 1 , z +1 …lẽ . Vậy số lượng các ước của A là số lẽ.

b, Nếu số lượng các ước của A là số lẽ thì (x + 1)(y + 1)(z + 1)…lẽ do đó các thừa số x + 1, y + 1, z + 1 ….đều lẽ , suy ra x, y, z …chẵn.

Đặt $x = ax'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$ …(x', y' ,z' … $\in N$ thì

$A = (a^{x'} b^{y'} c^{z'})^2$ nên A là số chính phương

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1: CÁCH BIỄU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN TRONG HỆ THẬP PHÂN.

$$N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0$$

Đặc biệt :

$$\overline{a.a...a} = a\underbrace{11...1}_{n \text{ so } 1} = \frac{a}{9}(\underbrace{99...9}_{n \text{ so } 9}) = \frac{a}{9}(10^n - 1)$$

Bài 1:

Chứng minh rằng số sau là một số chính phương

$$N = \underbrace{11111...1}_{1995 \text{ so } 1}.\underbrace{10000...0}_{1994 \text{ so } 0}5 + 1$$

Giải.

Ta có :

$$N = \frac{10^{1995}-1}{9}\left(10^{1995}+5\right)+1$$
$$= \frac{\left(10^{1995}-1\right)\left(10^{1995}+5\right)+9}{9}$$
$$= \frac{\left(10^{1995}\right)^2+4.10^{1995}+4}{9}$$
$$= \left(\frac{10^{1995}+2}{3}\right)^2$$
$$= \left(\frac{10^{1995}-1}{3}+1\right)^2$$
$$= \left[\frac{3}{9}\left(10^{1995}-1\right)+1\right]^2 = \underbrace{33333...3}_{1994\ \text{so}\ 3}4^2$$

Suy ra điều chứng minh

Bài 2:

Cho $A = \underbrace{999...9}_{n\ \text{so}\ 9}$ $(n \in N^8)$

So sánh tổng các chữ số của A^2 với tổng các chữ số của A

Giải.

Ta có :

$$A = \underbrace{999...9}_{n\ \text{so}\ 9} = 9.\left(\underbrace{111...1}_{n\ \text{so}\ 1}\right) = 10^n - 1$$

Vậy

$$A^2 = \left(10^n-1\right)^2$$
$$= \left(10^n\right)^2 - 2.10^n + 1$$
$$= \left(10^n-2\right)10^n + 1$$
$$= \left(10^n-1-1\right)10^n + 1$$
$$= \underbrace{999..9}_{n-1\ \text{so}\ 1}8\underbrace{000...0}_{n-1\ \text{so}\ 0}1$$

Tổng của các chữ số của $A^2 = \underbrace{9+9+9+...+9}_{n-1\ \text{chu so}\ 9}+8+1$

= (n – 1).9 + 9 = 9n

Tổng của các chử số của A = 9n

Vậy tổng các chử số của A^2 bằng tổng các chử số của A

Bài 3:

Tìm các chử số a, b, c > 0 sao cho mọi số tự nhiên n > 0 thì

$$\overline{\underbrace{a.a.a...a}_{n\text{ so a}}\underbrace{b.b.b...b}_{n\text{ so b}}}+1=\left(\overline{\underbrace{c.c.c...c}_{n\text{ so c}}}+1\right)^2$$

Giải.

$$\overline{\underbrace{a.a.a...a}_{n\text{ so a}}\underbrace{b.b.b...b}_{n\text{ so b}}}+1=\left(\overline{\underbrace{c.c.c...c}_{n\text{ so c}}}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a.\left(\underbrace{111...1}_{n\text{ so 1}}\right).10^n+b.\underbrace{111...1}_{n\text{ so 1}}+1=\left(c.\underbrace{111...1}_{n\text{ so 1}}+1\right)^2$$

Đặt $m=\underbrace{111...1}_{\text{n so 1}}$

Ta có :

$$am.10^n+bm+1=(cm+1)^2$$

$$\Leftrightarrow am(9m+1)+bm+1=cm^2+2cm+1$$

$$\Leftrightarrow 9am^2+(a+b)m=cm^2+2cm$$

Điều kiện bài toán đã cho tương đương với

$$\begin{cases}9a=c\\a+c=2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c^2}{9}\\b=2c-\dfrac{c^2}{9}\end{cases}$$

Suy ra $c\in\{3,6,9\}$ ta có ba bộ (a, b, c) thoả mãn là (1, 5, 3) ; (4, 8, 6) ; (9, 9, 9)

Bài 4:

Cho $m\in N^*, A=\underbrace{11111....1}_{\text{2m so 1}}$, $B=\underbrace{11111...1}_{\text{m+1 so 1}}$, $C=\underbrace{666...6}_{\text{m so 6}}$

Chứng minh rằng A + B + C + 8 là một số chính phương với $\forall m\in N^*$

Giải.

Ta có :

$$A = \frac{1}{9}\left(10^{2m} - 1\right)$$

$$B = \frac{1}{9}\left(10^{m+1} - 1\right)$$

$$C = \frac{1}{9}\left(10^{m} - 1\right)$$

Vậy $A + B + C = \frac{1}{9}\left(10^{2m} - 1\right) + \frac{1}{9}\left(10^{m+1} - 1\right) + \frac{6}{9}\left(10^{m} - 1\right) + 8$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{2m} - 1 + 10.10^{m} - 1 + 6.10^{m} - 6 + 72\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{2m} + 16.10^{m} + 64\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{m} + 8\right)^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{9}\left(10^{m} + 8\right)\right]^{2}$$

Là một số chính phương

Bài 5:

Chứng minh rằng mọi số tự nhiên n thì

$A = (10^{n} + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$

Là số chính phương nhưng không thể là lập phương của một số tự nhiên được

Giải.

Đặt $B = 10^{n+1}$ ta có

$$A = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1}\left(10^{n+1} + 5\right) + 1 = \frac{B - 1}{9}\left(B + 5\right) + 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{B^{2} + 4B + 4}{9} = \frac{\left(B + 2\right)^{2}}{3^{2}} = \left(3.3.3...34\right)^{2} \qquad (1)$$

Ta có $A = \left(3.3.3...34\right)^{2} = 2^{2}.\left(1\underbrace{666...6}_{n-1 \text{ so } 6}7\right)^{2}$ (2)

Từ (1) ta thấy A là một số chính phương nhưng từ (2) ta lại thấy A chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8 nên A không thể là lập phương của một số tự nhiên được.

Bài 6:

Chứng minh rằng .

$A = 244\underbrace{999...9}_{n-2 \text{ so } 9}1\underbrace{000...0}_{n \text{ so } 0}9$ **là số chính phương**

Giải.

Ta có:

$$A = 244\underbrace{999...9}_{n-2 \text{ so } 9}1\underbrace{000...0}_{n \text{ so } 0}9$$
$$= 244.10^{2n} + \underbrace{999...9}_{n-2 \text{ so } 9}.10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$
$$= 244.10^{2n} + \left(10^{n-2} - 1\right)10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$
$$= 244.10^{2n} - 90.10^{n} + 9$$
$$= \left(5.10^{n} - 3\right)^{2}$$

$(5.10^{n} – 3)^{2}$ là bình phương của một số tự nhiên . Vậy A là số chính phương

Bài 7:

Tìm một số có hai chử số biết rằng hiệu bình phương của nó và số viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương

Giải.

Giả sử $\overline{ab}$ là số có hai chử số sao cho $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương.

Ta có :

$$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = \left(10a + b\right)^2 - \left(10b + a\right)^2$$
$$= 99\left(a^2 - b^2\right) \vdots 11$$

Vì $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương nên $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 \vdots 121$ suy ra

$$a^2 - b^2 = \left(a - b\right)\left(a + b\right) \vdots 11 \Rightarrow a - b \vdots 11$$

(vì $0 < a - b \le 8$)

Mà $0 < a + b \le 18$ nên a + b = 11 (*)

Từ (*) suy ra $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 9.11.11\left(a - b\right)$ là số chính phương nên a – b = 1 hoặc a – b = 4

+ Nếu a – b = 1 thì từ (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases}$$

Thử lại $65^2 - 56^2 = 33^2$

+ Nếu a – b =4 thì từ (*) ta có hệ

$$\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ a = \frac{15}{2} \right. \quad \text{(loại)}$$

Vậy số cần tìm là 65

Bài 8:

Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Giải.

Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$

$$= 100\left(\overline{cd} + 1\right) + \overline{cd}$$

$$= 101\overline{cd} + 100$$

Suy ra : $101\overline{cd} = n^2 - 10^2 = (n-10)(n+10)$

Vì n < 100 và 101 là số nguyên tố nên

n + 10 = 101 suy ra n = 91

thử lại $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có 82 – 81 =1

vậy số cần tìm là 8281

Bài 9:

Tìm số chính phương có 4 chử số mà hai chử số đầu giống nhau và hai chử số cuối giống nhau

Giải.

Giả sử $\overline{xxyy}$ là một số chính phương ta có:

$$\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y$$

$$= 1100x + 11y$$

$$= 11(100x + y) \vdots 11$$

Do $\overline{xxyy}$ là số chính phương nên

$\overline{xxyy} \vdots 121 \Rightarrow 100x + y \vdots 11 \Rightarrow x + y \vdots 11$ $(vì\ 99x \vdots 11)$

Do $0 < x + y \le 11$ nên x + y = 11

$$\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1)$$

Suy ra 9x + 1 là số chính phương suy ra x = 7, y = 4

Thử lại $7744 = 88^2$. Vậy số cần tìm là 7744.

Bài 10:

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố , chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Giải.

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = o$ có nghiệm hữu tỉ , khi đó

$$\Delta = b^4 - 4ac = m^2 (m \in N^*)$$

Ta có:

$$4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c)$$
$$= 400a^2 + 40ab + 4ac$$
$$= 400a^2 + 40ab + b^2 - (b^2 - 4ac)$$
$$= (20a + b)^2 - m^2$$
$$= (20a + b - m)(20a + b + m)$$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $\left[\begin{array}{l} 20a + b - m \,\vdots\, \overline{abc} \\ 20a + b + m \,\vdots\, \overline{abc} \end{array}\right. \Rightarrow 20a + b + m \ge \overline{abc}$

Vì $b^2 - 4ac = m^2 \Rightarrow b > m$ do đó

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c > 20a + b > 20a + b + m \quad \text{(vô lí)}$$

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ

Bài 11.

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ (a > b > 0) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Giải.

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a)$$

$= 9a - 9b$

$= 9(a - b)$

$= 3^2(a - b)$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên a – b là số chính phương

Ta thấy $1 \le a - b \le 8$ nên $a - b \in \{1, 4\}$

- Với a – b = 1 thì $\overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ loại các hợp số 21, 32, 54, 65, 76, 87, 98

Còn 43 là số nguyên tố

- Với a – b = 4 thì $\overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84\}$ loại các hợp số 51, 62, 84, 95 còn 73 là số nguyên tố

Vậy $\overline{ab}$ = 43 hoặc 73

Khi đó 43 – 34 = 9 = 3^2

73 – 37 = 36 = 6^2

Bài 12:

Cho số tự nhiên A gồm 100 chử số 1, số tự nhiên B gồm 50 chử số 2. Chứng minh rằng A – B là một số chính phương.

Giải

Đặt $c = \underbrace{111...1}_{50\text{ so }1}$ thì B = 2C

$A = \underbrace{111...1}_{50\text{ so }1}\underbrace{000...0}_{50\text{ so }0} + \underbrace{111...1}_{50\text{ so }1}$

$= C.10^{50} + C$

$= C.(10^{50} + 1)$

Do đó A – B = C.10^{50} + C – 2C

= C. 10^{50} – C

= C (10^{50} – 1)

Ta lại có $10^{50} - 1 = \underbrace{999...9}_{50\text{ so }9} = 9C$

Vậy A – B = C.9C = $(3C)^2$ là số chính phương.

DẠNG 2: DÙNG TÍCH CHIA HẾT .

Bài 1:

Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho khi viết 4 chữ số đó theo thứ tự ngược lại ta củng được một số chính phương và số chính phương này là bội số của số chính phương cần tìm.

Giải.

Đặt số phải tìm là $\overline{abcd} = M^2$ thì 1000 < M^2 < 10000 nên 31 < M < 50

Ta lại có $\overline{dcba} = N^2$. Tính tổng và hiệu hai số chính phương này ta được

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a+d) + 110(b+c) \vdots 11$$
$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(d-a) + 90(c-b) \vdots$$

Vì $\overline{dcba}$ là bội của $\overline{abcd}$ nên $\overline{abcd}$ vừa phải chia hết cho 11 vừa phải chia hết cho 3 tức là bội số của 33

Mà 31 < M < 50 nên M = 33 và ta có

$$\overline{abcd} = 33^2 = 1089, \quad \overline{dcba} = 9801 = 99^2$$

Bài 2:

Chứng minh rằng nếu tích hai số nguyên tố cùng nhau là số chính phương thì mỗi số sẽ là số chính phương .

Giải.

Giả sử (a, b) = 1 và ab = c^2 $(c \in N)$ ta chứng minh a, b đều là các số chính phương

Gọi d = (a, c) khi đó a = a_1d , c = c_1d, (a_1, c_1) = 1. Từ đó suy ra

$$a_1db = c_1^2d^2 \Rightarrow a_1b = c_1^2d$$

+ $a_1b \vdots c_1^2 \Rightarrow b \vdots c_1^2$ vì (a_1, c_1)

+ $c_1^2d^2 \vdots b \Rightarrow c_1^2 \vdots b$ vì (b, d) = (b, a) = 1

Vậy $b = c_1^2$ và $a = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 = d^2$

Nhận xét:

Ta có thể phân tích a, b ra thừa số nguyên tố rồi từ ab = c^2 và (a, b) = 1. Suy ra a, b là các số chính phương

Bài 3:

Tìm dư trong phép chia một số chính phương cho 3, cho 5

Giải.

Số chính phương có dạng n^2 ($n \in N$)

1. Chia n cho 3 thì n = 3k hoặc $n = 3k \pm 1$

- Nếu n = 3k thì $n^2 = 9k^2 \vdots 3$
- Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia 3 dư 1

Vậy số chính phương chia cho 3 có dư la 0 hoặc 1. Từ đó ta có kết quả sau. Một số có dạng 3k + 2 không thể là một số chính phương

2. Chia n cho 5 thì $n = 5k, n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2$

- Nếu n = 5k thì $n^2 = 25k^2 \vdots 5$
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ chia 5 dư 1
- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ chia 5 dư 4

Vậy số chính phương khi chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4. Từ đó ta có kết quả sau : một số có dạng 5k +2 hoặc 5k + 3 không thể là một số chính phương.

Bài 4:

Chứng minh rằng tổng luỹ thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải.

Tổng luỹ thừa 2k $(k \in N^*)$ của ba số nguyên liên tiếp có dạng

$(n – 1)^{2k} + n^{2k} + (n + 1)^{2k}$

Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3, hai số còn lại có dạng $3k \pm 1$ nên tổng luỹ thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp chia cho 3 có dư là 2 nên không thể là một số chính phương.

Bài 5:

Chứng minh rằng tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải.

Tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp có dạng

$T = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$

$= 5n^2 + 10$

$= 5(n^2 + 2)$

Ta chứng minh $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 với mọi n

- Nếu $n \vdots 5k$ thì $n^2 + 2$ chia cho 5 dư 2
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (5k+1)^2 + 2$ chia 5 dư 3
- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 2)^2 + 2$ chia 5 dư 1

Vậy $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 nên T chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 do đó T không phải là một số chính phương.

Bài 6:

Các tổng sau có là số chính phương hay không

1. $\mathbf{A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20}}$
2. $\mathbf{B = 11 + 11^2 + 11^3}$
3. $\mathbf{10^{10} + 8}$
4. **100! + 7**
5. $\mathbf{10^{10} + 5}$
6. $\mathbf{10^{100} + 10^{50} + 1}$

Giải.

1. Ta biết rằng số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9. A chia hết cho 3, nhưng chia 9 dư 3 , do đó A không là số chính phương.
2. B tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương
3. $10^{10} + 8$ không là số chính phương vì tận cùng bằng 8.
4. 100! + 7 không là số chính phương vì tận cùng bằng 7

5. $10^{10} + 5$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương.

6. $10^{100} + 10^{50} + 1$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 7:

Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương

1. $\overline{abab}$

2. $\overline{abcabc}$

3. $\overline{ababab}$

Giải.

Giả sử các số trên đều là số chính phương. Ta có

1. $$n^2 = \overline{abab} = \overline{ab}.10^2 + \overline{ab} = 101\overline{ab}$$
$$\Rightarrow \overline{ab} \vdots 101$$

(vô lí)

2. $$n^2 = \overline{abcabc} = \overline{abc}.10^3 + \overline{abc}$$
$$= 1001\overline{abc} = 3.11.13.\overline{abc}$$

Vì 3, 11, 13 là số nguyên tố nên $\overline{abc} \vdots 1001$ (vô lí)

2. $$n^2 = \overline{ababab} = \overline{ab}.10^4 + \overline{ab}.10^2 + \overline{ab}$$
$$= 10101\overline{ab} = \overline{ab}3.7.13.37$$

Vì 3, 7, 13, 37 là số nguyên tố nên $\overline{ab} \vdots 10101$ (vô lí)

Vậy các số trên đều không phải là số chính phương.

Bài 8:

Biết a + 1 và 2a + 1 $(a \in N)$ **đồng thời là hai số chính phương. Chứng minh rằng a chia hết cho 24**

Giải.

Đặt $a + 1 = k^2, 2a + 1 = m^2$ $(k, m \in N)$

Vì 2a + 1 là một số lẽ nên m^2 là số lẽ do đó m là số lẽ

Đặt m = 2t + 1 $(t \in N)$ khi đó

$2a+1=(2t+1)^2 \Rightarrow a=2t(t+1)$ là số chẵn nên a + 1 là số lẽ vì k^2 là số lẽ.

Ta lại có a = k^2 – 1 = (k – 1)(k + 1) là tích của hai số chẵn liên tiếp nên a chia hết cho 8 (1)

Mặt khác a + 1 + 2a + 1 = 3a + 2 = k^2 + m^2 là số chia cho 3 dư 2. Do vậy cả hai số k^2 và m^2 khi chia cho 3 đều dư 1

Khi đó m^2 – k^2 = 2a + 1 – a – 1 = a chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a \vdots 3 \\ a \vdots 8 \end{cases} \Rightarrow a \vdots 24$.

Bài 9:

Từ các chử số 1, 2, 3, 4, 5, 6 người ta lập tất cả các chử số có 6 chử số , mỗi số gồm các chử số khác nhau . Hỏi trong các số lập được có số nào chia hết cho 11 không ? có số nào là chính phương không ?

Giải.

Gọi số co 6 chử số lập được là $\overline{abcdef}$ trong đó a, b, c, d, e, f là các chử số đôi một khác nhau lấy trong 6 chử số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tổng các chử số lập được đều bằng 21. giả sử $\overline{abcdef}$ chia hết cho 11 khi đó ta có

(a + c + e) – (b + d + f) chia hết cho 11

Vì $9=(6+5+4)-(3+2+1)\geq(a+c+e)-(d+e+f)\geq(1+2+3)-(4+5+6)=-9$

Mà $(a+c+e)-(b+d+f)\vdots 9$ nên (a + c + e) – (b + d + f) = 0

Suy ra a + c + e = b + d + f

Mặt khác a + b + c + d + e + f = 21 do đó

2(a + c + e) = 2(b + d + f) = 21

21 không thể chia hêt cho 2

Vậy trong các số lập được không có số nào chia hết cho 11.

Giả sử $\overline{abcdef}$ là số chính phương. Vì tổng các chử số của A là 21 nên A chia hết cho 3 . Đặt A = n^2 thì n là số nguyên dương chia hết cho 3 , suy ra A chia hết cho 9 . Mặt khác tổng các chử số của A là 21 , do đó A không chia hêt cho 9.

Mâu thuẫn này chứng tỏ A không là số chính phương.

Bài 10:

Cho A là một số tự nhiên gồm 100 chử số trong đó có 999 chử số 5 và một chử số khác 5 . Chứng minh A không thể là một số chính phương

Giải .

Giả sử A = k^2 $\left(k \in N^+\right)$

Xét các trường hợp :

- Nếu A tận cùng bởi 5 thì $A \vdots 5$ nên $k^2 \vdots 25$. Đặt k = 5q $\left(q \in N^+\right)$

Vì A là số lẽ nên q là số lẽ . Đặt q = 2p + 1 và

$A = k^2 = 25(2p + 1)^2 = 100p^2 + 100p + 25$

Do đó A tận cùng bởi 25 vậy

A = 555…525 = 555…500 + 25

$= 100p^2 + 100p + 25$

Suy ra 555…500 = $100p^2$ + 100p hay 555…5 = p^2 + p = p(p + 1) là số chẵn, vô lí .

Vậy A không thể tận cùng bằng 5.

- Néu A tận cùng bởi 0 thì A = 555…50 chia hết cho 10 nhưng không chia hết cho 100 . A không thể tận cùng bởi 0

- Nếu A tận cùng bởi 1 thì A = 555…51 = k^2 lẽ, nên A là số lẽ . Đặt

k = 2n + 1 $\left(n \in N^+\right)$ ta có 555…51 = $(2n + 1)^2$, suy rr

555…50 = 4n(n + 1) vế phải chia hết cho 4 vế trái không chia hết cho 4 , vô lí .

Do đó A không tận cùng bằng 1.

- Nếu A tận cung bởi 6 thì 555…56 = k^2 tổng các chử số của A bằng

5.999 + 6 là số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9. Do đó A không là số chính phương . Vậy A không thể tận cùng bằng 6

- Nếu A tận cùng bởi 4 thì 555…54 = k^2 , suy ra k là số chẵn. Đặt k = 2m $\left(m \in N^+\right)$, khi đó A = 555…54 = $4m^2$ là số chia hết cho 4 , vô lí .

Vậy A không thể tận cùng bằng 4

- Nếu A tận cùng bởi 9 thì A = 555..59 = k^2 suy ra k là số lẽ . Đặt k = 2l + 1 $\left(l \in N^+\right)$. Khi đó A = 555…59 = $(2l + 1)^2$. suy ra

555…58 = 4l(l + 1) chia hết cho 4 , vô lí

Vậy A không thể tận cùng bởi 9

Tóm lại không tồn tại số chính phương gồm 1000 chử số trông số có 999 chử số 5 và một chử số khác 5.

Bài 11:

Người ta viết liên tiếp các số : 1, 2, 3, …, 1994 thành một hàng ngang theo thứ tự tuỳ ý . Hỏi số tạo thành theo cách viết trên có thể là số chính phương không.

Giải.

Gọi A là số nhận được khi viết liên tiếp các số : 1, 2, 3, …,1994 thành một hàng ngang theo thứ tự tuỳ ý. $S_{(A)}$ là tổng các chử số của A.

Ta có:

$S_{(A)}$ = 1 + 2 + 3 + …+ 9 + (1 + 0) + …+(1 + 9 + 9 + 4)

= 1 + 2 + 3 + …+ 10 + 11 + …+ 1994

= 1995.997

Ta thấy A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, do đó A không là số chính phương.

Bài 12:

Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì p – 1 và p + 1 không thể là số chính phương.

Giải.

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a, Giả sử p + 1 là số chính phương. Đặt p + 1 = m^2 $(n \in N)$

vì p là số chẵn nên p + 1 là số lẽ, vì thế m^2 là số lẽ.

Đặt m = 2k + 1 $(k \in N)$

Ta có $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ suy ra $p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$ do đó

p = 4k(k + 1) là số chia hết cho 4 mâu thuẫn với (1). Vậy p + 1 không là số chính phương.

b, Ta có p = 2.3.5… là số chia hết cho 3. Do đó p – 1 = 3k + 2 không kà số chính phương vậy nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì p – 1 và p + 1 không là số nguyên tố

Bài 13:

Tìm một số co hai chử số , biết rằng tổng của nó và số viết theo thứ tự ngược lại là số chính phương.

Giải.

Giả sử $\overline{ab}$ là số co hai chử số sao cho $\overline{ab}+\overline{ba}$ là số chính phương. Ta có

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b)\vdots 11$$

Vì $\overline{ab}+\overline{ba}$ là số chính phương nên $\overline{ab}+\overline{ba}\vdots 121$, từ đó suy ra a + b = 11.

Mà $0<a+b\le 18$ nên a + b = 11 .

Vậy các số cần tìm là 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

DẠNG 3: PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ.

Bài 1:

Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng một là một số chính phương .

Giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \\ &= k^2 \end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 2:

Chứng minh rằng nếu m, n là hai số chính phương lẽ liên tiếp thì

$$(m-1)(n-1)\vdots 192$$

Giải.

Ta có : $m = (2k-1)^2$ và $n = (2k+1)^2$ do đó

$$(m-1)(n-1) = [(2k-1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 1]$$

$= (4k^2 + 4k)(4k^2 – 4k)$

$= 16k^2(k – 1)(k + 1)$

Ta nhận thấy $k(k – 1)(k + 1)$ chia hết cho 3

Mặt khác $k^2(k – 1)(k + 1) = [k(k – 1)][k(k + 1)]$ gồm các tích của hai nhóm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2*2 = 4

Do đó $k^2(k – 1)(k + 1)$ chia hết cho 12

Vậy $(m – 1)(n – 1)$ chia hết cho 12.16 = 192

(điều phải chứng minh).

Bài 3:

Chứng minh răng số có dạng $n^6 – n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và n > 1 không phải là số chính phương.

Giải.

Ta có:

$$n^6 – n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n^4 – n^2 + 2n + 2)$$
$$= n^2[(n^2 – 1)^2 + (n + 1)^2]$$
$$= n^2(n + 1)^2[(n – 1)^2 + 1].$$

Với n > 1 thì

$$(n – 1)^2 + 1 = n^2 – 2n + 2 = n^2 – 2(n – 1) < n^2 \text{ và } (n – 1)^2 + 1 > (n – 1)^2$$

Nghĩa là $(n – 1)^2 < (n – 1)^2 + 1 < n^2$, do đó $(n – 1)^2 + 1$ không là số chính phương.

Từ đó suy ra $n^6 – n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương với mọi $n \in N$ và n > 1.

Bài 4:

Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 31n + 1984$ là số chính phương.

Giải.

Giả sử $n^2 + 31n + 1984 = m^2$ ($m \in N$)

Suy ra $4.n^2 + 4.31n + 4.1984 = 4m^2$

Hay $(2n + 31)^2 + 6975 = 4m^2$

Hay $(2m – 2n + 31)(2m + 2n + 31) = 6975$ (*)

Để ý rằng $6975 = 3^2.5^2.31$ và do m > 44 (vì nếu $m \le 43$ thì $m^2 < n^2 + 31n + 1984$) nên $2n + 2m + 31 > 121$

Khi đó từ (*) suy ra $0 < 2m - 2n - 31 < \frac{6975}{121} < 58$

Do đó 2m – 2n – 31 chỉ có thể nhân các giá trị : 1, 3, 5, 9, 15, 25, 31, 45 và

2m + 2n + 31 nhận các giá trị : 6975, 2325, 1395, 775, 465, 279, 225, 155, suy ra các giá trị tương ứng của n là : 1728, 565, 332, 176, 97, 48, 33, 12.

Các giá trị này của n đều thoả mãn đề bài.

Bài 5:

Tìm số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước dương của p^4 là một số chính phương.

Giải.

Các ước dương của p^4 là 1, p, p^2, p^3, p^4

Giả sử : $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ $(n \in N)$

Ta có : $4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ (1)

Suy ra : $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 4p + 8p^2$

Hay : $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 1)^2$

Suy ra: $(2n)^2 = (2p^2 + 2p + 1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = \left(2p^2 + p + 1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$$

Với p = 3, ta có : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$

Vậy số nguyên tố cần tìm là p = 3.

Bài 6:

1. **Tìm các số tự nhiên x sao cho $65 + x^2$ là số chính phương**
2. **Tìm các số tự nhiên x sao cho $x^2 + 21$ là số chính phương**

Giải.

1. Đặt

$$65 + x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 65$$
$$\Leftrightarrow \left(y + x\right)\left(y - x\right) = 3.15 = 64.1$$

Hoặc $\begin{cases} y+x=13 \\ y-5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} y+x=65 \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=33 \end{cases}$

Vậy x = 4 hoặc x = 32

2. x = 2 hoặc x = 10.

Bài 7:

Tìm số nguyên tố x để x^2 + x + 1991 là số chính phương.

Giải.

Từ $x^2 + x + 1991 = y^2$ ta có

$4y^2 = 4x^2 + 4x + 7964$

Hay

$$4y^2 = (2x+1)^2 + 7963 \Leftrightarrow 4y^2 - (2x+1)^2 = 7963$$
$$\Leftrightarrow (2y+2x+1)(2y-2x-1) = 7963$$

Có thể thử lại để thấy rằng 7963 là một số nguyên tố (không chia hết cho bất kì số nguyên tố nào từ 0 đến 90) từ đó sút ra

$$\begin{cases} 2y+2x+1=7963 \\ 2y-2x-1=1 \end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases} 2y+2x+1=1 \\ 2y-2x-1=7963 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} 2y+2x+1=-7963 \\ 2y-2x-1=-1 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} 2y+2x+1=-1 \\ 2y-2x-1=-7963 \end{cases}$

Tính ra ta được x = 1990 hoặc x = -1991.

Bài 8:

Tìm số hữu tỉ x sao cho x^2 + x + 6 là số chính phương.

Giải

Giả sử $x = \frac{p}{q}$ với (p,q) = 1 và q > 0 sao cho $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ với $n \in N$

Suy ra : $p^2 = q\left(-p - 6q + n^2 q\right) \vdots q \Rightarrow q = 1$

Vậy: $x = p \in Z$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
& p^2 + p + 6 = n^2 \\
& \Leftrightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4n^2 \\
& \Leftrightarrow (2n)^2 - (2p+1)^2 = 23 \\
& \Leftrightarrow (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) = 23
\end{aligned}$$

Phân tích: 23 = 1.23 = (-1).(-23) = 23.1 = (-23).(-1).

Giải ra ta được : p = 5, n = 6.

Bài 9:

Cho n là số tự nhiên và d là ước nguyên dương của $2n^2$. chứng minh rằng n^2 + d không là số chính phương.

Giải.

Giả sử : $n^2 + d = m^2 (m \in N)$ (1)

d là ước dương của $2n^2$ nên

$$2n^2 = kd (k \in N) \Rightarrow d = \frac{2n^2}{k}$$

Thay $d = \frac{2n^2}{k}$ vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}
& n^2 + \frac{2n^2}{k} = m^2 \\
& \Leftrightarrow n^2 k^2 + 2n^2 k = m^2 k^2
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $k^2 + 2k = \left(\frac{mk}{n}\right)^2$ là số chính phương.

Nhưng $k^2 < k^2 + 2k < (k + 1)^2$ ta gặp mâu thuẫn.

Vậy n^2 + d không thể là số chính phương.

Bài 10:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y

A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4

Là số chính phương.

<u>Giải.</u>

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 \\
&= \left[(x+y)(x+4y)\right]\left[(x+2y)(x+3y)\right]+y^4 \\
&= \left(x^2+5xy+4y^2\right)\left(x^2+5xy+6y^2\right)+y^4 \\
&= \left[\left(x^2+5xy\right)+4y^2\right]\left[\left(x^2+5xy\right)+6y^2\right]+y^4 \\
&= \left(x^2+5xy\right)^2+10.y^2\left(x^2+5xy\right)+25y^4 \\
&= \left(x^2+5xy+5y^2\right)^2
\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

<u>Bài 11:</u>

Cho N = 1.2.3 + 2.3.4 + …+n(n + 1)(n + 2), chứng minh rằng 4N + 1 là một số chính phương với mọi số nguyên dương n.

<u>Giải.</u>

Ta có :

$$k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)-\frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
N &= 1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{4}1.2.3.4-\frac{1}{4}0.1.2.3+\frac{1}{4}.2.3.4.5-\frac{1}{4}.1.2.3.4+... \\
&+\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{4}.n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

Vậy $4N+1=4.\frac{1}{4}.n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$$=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

Vậy 4N +1 là số nguyên tố.

C. BÀI TẬP.

1. Chứng minh rằng mọi số chính phương lẻ đều có chử số hàng chụa là chử số chẳn.

2. Chứng minh rằng một số chính phương lớn hơn 100 có chử số tận cùng là 5 thì chử số hàng trăm là số chẳn

3. Tìm các số x, y, z, t thoả

$$a, \overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$$
$$b, \overline{xy}^2 = \overline{yx}^2 + \overline{tz}^2$$

4. Tìm số chính phương có 4 chử số mà 2 chử số cuối cùng giống nhau

5. Tìm số có hai chử số $\overline{xy}$ sao cho $2\overline{xy}+1$ và $3\overline{xy}+1$ là hai số chính phương.

6. Tìm $\overline{abcd}$ biết rằng $a, \overline{cd}, \overline{ad}, \overline{abcd}$ đều là số chính phương.

7. Tìm một số điện thoại có 4 chử số biết rằng nó là một số chính phương và nếu ta thêm vào mỗi chử số của nó một đơn vị thì cung được một số chính phương.

8. p là số chính phương có n + 4 chử số trong đó n chử số đầu và 4 chử số cuối đều là số chính phương. Tìm số lớn nhất của p.

9. Chứng minh rằng tích 8 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

10. Cho dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n$, biết rằng.:

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$ và $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-3}$ $(n \geq 4)$.

Chứng minh rằng với $n \geq 2$ thì $A = 2^{n+1} - 7a_{n-1}^2$

Hướng dẫn giải.

1. $\left(10n+b\right)^2 = 25n\left(5n+b\right)+b^2$, b lẻ nên b^2 là một trong các giá trị: 1, 9, 25, 49, 81. Các số này có chử số hàng chục là số chẳn.

2. $\left(10n+5\right)^2 = 100n^2+100n+25 = 100n\left(n+1\right)+25; n\left(n+1\right)$ là số chẳn.

3. Chứng minh x + y chia hết cho 11.

$$a, 8833 = 88^2 + 33^2$$
$$b, 65^2 = 56^2 + 33^2$$

4. Số tận cùng của một số chính phương có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, lẻ thì chia hết cho 4 dư 1.

$1144 = 38^2$

5. Dựa vào số tận cùng của số chính phương, y = 5 hoặc y = 0.

$\overline{xy} = 40$ thì $2\overline{xy} + 1 = 38,\ 3\overline{xy} + 1 = 121.$

6. Tự làm.

7. Gọi

$$\overline{abcd} = x^2, \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = y^2$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 1111 = 11.101$$
$$\overline{abcd} = x^2 = 2025$$

8.Giả sử

$$p = A^2 = 10^4 B^2 + C^2 \Rightarrow (A - 100B)(A + 100B) = C^2;$$
$$200B = (A + 100B) - (A - 100B) \le C^2 - 1 \le 99^2 - 1 = 9800 \Rightarrow B \le 49;$$
$$p = 10^4.49^2 + 99^2 = 1901^2.$$

9. Giả sử.

$$T = n(n+1)...(n+7) = (n^2 + 7n)(n^2 + 7n + 6)(n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12)$$

Đặt $m = n^2 + 7n + 6$ thì T chẵn và $(m^2 + 2m - 22)^2 < T < (m^2 + 2m - 20)^2$

10. Bằng quy nặp chứng minh $A_n = (2a_n + a_{n-2})^2, n \ge 2$

CHUYÊN ĐỀ 4: BỘI VÀ ƯỚC CỦA CÁC SỐ.

A.Lý thuyết.

1. Số các ước của một số tự nhiên.

Giả sử n được phân tích ra thừa số nguyên tố là : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ với p_i nguyên tố và $\alpha_i \in N$ thì số các ước của n là $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

2.Ước chung lớn nhất

$$d = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid a \text{ và } d \mid b \\ \text{d là moi uoc chung cua a và b} \end{cases}$$

Nếu d = 1 ta nói a, b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Tính chất :

i)

$$d = (a,b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1$$

ii)

$$(ka, kb) = k(a,b)$$

iii)

$$\begin{cases} (a,c) = 1 \\ ab \vdots c \end{cases} \Rightarrow b \vdots c$$

iv)

$$\begin{cases} a \vdots n, a \vdots m \\ (n,m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \vdots n.m$$

v)

$$(a,b) = (a,c) = 1 \Rightarrow (a,bc) = 1$$

vi)

$$(a,b,c) = ((a,b),c)$$

3.Thuật toán Euclid để tìm ƯCLN

a) Trường hợp $b \mid a$ thì $(a, b) = b$

b) Trường hợp $b \nmid a$, giả sử $a = bq + c$ thì $(a, b) = (b, c)$.

Thuật toán Euclid .

Giả sử:

$a = bq + r_1$, $0 < r_1 < b$

$b = r_1q_1 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2q_2 + r_3$, $0 < r_3 < r_2$

…

$R_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$, $0 < r_n < r_{n-1}$

$R_{n-1} = r_nq_n$

Thuật toán Euclid phải kết thúc với số dư $r_{n-1} = 0$.

Theo b) ta có: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1,r_2) =\ldots=(r_{n-1} ,r_n) = r_n$.

Vậy ƯCLN của a, b là dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclid.

<u>4.Bội chung nhỏ nhất.</u>

$$m = [a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} m \vdots a \quad \text{và } \ m \vdots b \\ \text{m la uoc chung cua a và b} \end{cases}$$

Tính chất.

i)

$$[ka, kb] = k[a,b]$$

ii)

$$[a,b,c] = [[a,b],c]$$

iii)

$$(a,b).[a,b] = a.b$$

5. Phân số tối giản

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản $\Leftrightarrow$ (a, b) = 1.

Tính chất:

Mọi phân số khác 0 đều có thể đưa về dạng tối giản.

Dạng tối giản của một phân số là duy nhất.

Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

B. Các dạng toán.

DẠNG 1: SỐ ƯỚC CỦA MỘT SỐ.

Bài 1:

Tìm số ước của số 18^{96}

Giải.

Ta có: $18^{96} = \left(3^2.2\right)^{96} = 3^{192}.2^{96}$

Vậy số ước số của 18^{96} là (96 + 1)(192 + 1) = 97.193 = 18721.

Bài 2:

Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

Giải.

Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ với pi nguyên tố và $\alpha_1 \in N^*$

n là số chính phương $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ là các số chẳn.

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ là số lẻ.

Bài 3:

Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có 17 ước số:

Giải.

Tổng bình phương của 3 số tư nhiên liên tiếp có dạng:

n = $(m – 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2 = 3m^2 + 2$ không thể là số chính phương.

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương, vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4:

Chứng minh rằng một số tự nhiên có 3 chử số tận cùng là 136 thì có ít nhất 4 ước số dương.

Giải.

Số có 3 chử số tận cùng là 136 thì chia hết cho 8 nên có ít nhất 4 ước số dương là 1, 2, 4, 8.

DẠNG 2: TÌM 2 SỐ TRONG ĐÓ BIẾT ƯCLN CỦA CHÚNG.

Bài 1.

Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 6.

Giải.

Gọi 2 số phải tìm là a và b $(a \le b)$. Ta có (a, b) = 6 nên a = 6a’, b = 6b’ trong đó (a’, b’) = 1 .

Do đó a + b = 84 nên 6(a’ + b’) = 84 suy ra a’ + b’ = 14.

Chọn cặp số a’ , b’ nguyên tố cùng nhau có tổng bằng 14 $(a' \le b')$ ta được:

a'	1	3	5
b'	13	11	9

do đó

a	6	18	30
b	78	66	54

Bài 2.

Tìm 2 số tự nhiên có tích bằng 300 , ƯCLN bằng 5.

Giải.

Gọi 2 số phải tìm là a và b $(a \le b)$. Ta có (a, b) = 5 nên a = 5a’, b = 5b’ trong đó (a’, b’) = 1

Do đó ab = 300 nên 25a’b’ = 300 suy ra a’b’ = 12 = 3.4

Chọn cặp số a’, b’ nguyên tố cùng nhau có tích bằng 12 $(a' \le b')$ ta được:

a'	1	3
b'	12	4

do đó

a	5	15
b	60	20

Bài 3.

a) Tìm 2 số a, b biết a + b = 66, (a, b) = 6 và trong hai số a, b có một số chia hết cho 5.

b) Tìm a, b biết ab = 75 và (a, b) = 5.

Giải.

a) Vì (a, b) = 6 nên a = 6k, b = 6l với (k, l) = 1

Từ a + b = 66 suy ra 6k + 6l = 66 $\Leftrightarrow$ k + l = 11

Vì trong hai số a, b có một số chia hết cho 5 nên giả sử $k \vdots 5 \Rightarrow k = 5$ hoặc k = 10, khi đó l = 6, l = 1.

Vậy a = 30, b = 36 hoặc a = 60, b = 6.

b) Vì (a, b) = 5 nên a = 5k , b = 5l với (k, l) = 1.

Từ ab =75 suy ra 25kl = 75 $\Leftrightarrow$ kl = 3.

Vậy k = 3, l = 1 hoặc k = 1, l = 3.

Từ đo hai số cần tìm là 5 và 15.

Bài 4.

Tìm hai số tự nhiên a, b thoả : a + b = 128 và (a, b) = 16.

Giải.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $(a \leq b)$.

Vì (a, b) = 16 nên a = $16a_1$, b = $16b_1$ với $(a_1, b_1) = 1$.

Từ a + b = 128 suy ra $16(a_1 + b_1) = 128$ $\Leftrightarrow$ $a_1 + b_1 = 8$, với điều kiện $(a_1 \leq b_1)$ và $(a_1, b_1) = 1$ ta có $a_1 = 1$, $b_1 = 8$ hoặc $a_1 = 3$, $b_1 = 5$. Từ đó ta có a = 16, b = 112 hoặc a = 48, b = 80.

Bài 5.

a) ƯCLN của hai số tự nhiên bằng 4, số nhỏ bằng 8. Tìm số lớn .

b) ƯCLN của hai số tự nhiên bằng 16 , số lớn bằng 96. Tìm số nhỏ.

Giải.

a) Gọi số lớn là a = 4k $(k \in N)$. Do số nhỏ là 8 = 4.2 nên k > 2 và (k, 2) = 1.

Vậy k = 2n + 1 (n = 1, 2, 3…)

Do đó số lớn có dạng 4(2n + 1).

b) Đáp số 16 hoặc 80

Bài 6.

Tìm hai số tự nhiên , biết rằng :

a) Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN bằng 28, các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.

b) Hiệu của chúng băng 48, ƯCLN bằng 12.

Giải.

Gọi hai số phải tìm là a và b, ta có: a – b = 84, a = 28a’, b = 28b’ trong đó (a’, b’) = 1, suy ra a’ – b’ = 3.

Do $300 \le b < a \le 400$ nên $11 \le b' < a' \le 15$.

Trường hợp a’ = 15, b’ = 12 loại vì trái với (a’, b’) = 1.

Trường hợp a’ = 14, b’ = 11 cho a = 392, b = 308.

b) Có vô số đáp số: a = 12a’, b = 12b’ với a’ = 2n + 5, b’ = 2n + 1

DẠNG 3: PHỐI HỢP GIỮA BCNN VÀ ƯCLN

Tích của hai số a, b thì bằng tích của ƯCLN với BCNN của các số ấy

ƯCLN(a, b). BCNN(a, b) = a.b

Bài 1.

Tìm các số tự nhiên a, b biết ƯCLN(a, b) = 5 , BCNN(a, b) = 105.

Giải.

Ta có : a.b = 5.105 = $3.\ 5^2.7$

Mặt khác : 105 = 3.5.7

Suy ra: a = 5, b = 105 hoặc a = 15, b = 35.

Bài 2.

Cho a = 1980. b = 2100.

a) Tìm (a, b) và [a, b].

b) So sánh [a, b].(a, b) với a.b. Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tuỳ ý.

Giải.

a) 1980 = $2^2.3^2.5.11$

2100 = $2^2.3.5^2.7$

ƯCLN(1980, 2100) = $2^2.3.5$ = 60

BCNN(1980, 2100) = $2^2.3^2.5^2.7.11$ = 69300.

b) [1980, 2100].(1980, 2100) = 1980.2100 = 4158000. Ta chứng minh rằng

[a ,b].(a, b) = a.b

Cách 1: Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số 11, b không chứa thừa số 11 thì ta coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$1980 = 2^2.3^2.5.7^0.11$

$2100 = 2^2.3.5^2.7.11^0$

(1980, 2100) là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2.3.5.7^0.11^0 = 60$.

[1980, 2100] là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhât

$2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300$

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

[a, b].(a, b) = a.b (1)

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố có trong a và b. Ta chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương tứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tuỳ ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x, số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể băng 0. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $x \geq y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ x + y. Còn ở vế trái , [a, b] chứa p với số mũ x, (a, b) chứa p với số mũ y nên vế trái cũng chứa p với số mũ x + y.

Cách 2: Gọi d = (a, b) thì a = da’, b = db’ (1), trong đó (a’,b’) = 1

Đặt $\frac{ab}{d} = m$ (2) , ta cần chứng minh rằng [a, b] = m.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại của các số tự nhiên x, y sao cho m = ax, m = by và (x, y) = 1.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a.\frac{b}{d} = ab'$

$m = b.\frac{a}{d} = b.a'$. Do đó ta chọn x = b’, y = a’, thế thì (x, y) = 1 vì (a’, b’) = 1.

Vậy $\frac{ab}{d} = [a,b]$ tức là [a, b].(a, b) = ab.

Bài 3.

Tìm 2 số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10. BCNN của chúng bằng 900.

Giải.

Gọi số phải tìm là a, b, giả sử $a \le b$ ta có (a, b) = 10 nên a = 10a', b = 10b', (a', b') = 1 , $a' \le b'$. Do đó ab = 100a'b' (1)

Mặt khác ab = [a, b].(a,b) = 900.10 = 9000 (2)

Từ (1) và (2) suy ra a'b' = 90. Ta có các trường hợp:

a'	1	2	5	9
b'	90	45	18	10

Do đó

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài 4.

Tìm hai số tự nhiên

a) Có tích bằng 2700, BCNN bằng 900

b) Có tích bằng 9000, BCNN bằng 900.

Giải.

a) Gọi hai số phải tìn là a và b

ƯCLN(a, b) = $\frac{a.b}{BCNN(a,b)} = \frac{2700}{900} = 3$

ƯCNN(a, b) = 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3a' \\ b = 3b' \\ (a',b') = 1 \end{cases}$.

Theo đề bài: a.b = 2700

Nên 3a'.ab' = 2700

Suy ra a'.b' = 300 = $2^2.3.5^2$

Giả sử $a \ge b$ thì $a' \ge b'$. Chọn hai số a', b' có tích bằng 300, nguyên tố cùng nhau, $a' \ge b'$, ta được.

a'	300	100	75	25
b'	1	3	4	12

Suy ra

a	900	300	225	75
b	3	9	12	36

Đáp số 900 và 3, 300 và 9, 225 và 12, 75 và 36

b) Đáp số 900 và 10; 450 và 20; 180 và 50; 100 và 90.

Bài 5.

Tìm hai số tự nhiên a và b, biết rằng:

a) ab = 360, BCNN(a, b) = 60.

b) ƯCNN(a, b) = 12, BCNN(a, b) = 72.

Giải.

a) (a, b) = ab : [a, b] = 360 : 60 = 6.

Đặt a = 6a', b = 6b' trong đó (a' ,b') = 1, $a' \le b'$ (giả sử $a \le b$).

Do ab = 360 nên a'b' = 10. Vậy a' = 1, b' = 10 hoặc a' = 2, b' = 5.

Tương ứng ta có: a = 6, b = 60 hoặc a = 12, b = 30.

b) ƯCLN(a, b) = 12 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ (a', b') = 1 \end{cases}$

Ta có: a.b = ƯCLN(a, b).BCNN(a, b) = 12.72

Nên 12a'.12b' = 12.72

Suy ra a'.b' = 6

Giả sử $a \ge b$ thì $a' \ge b'$. Chọn hai số a', b' có tích bằng 6, nguyên tố cùng nhau, $a' \ge b'$, ta được :

a'	6	3
b'	1	2

do đó

a	72	36
b	12	24

Đáp số : 72 và 12; 36 và 24

DẠNG 4. TÌM ƯCLN CỦA HAI SỐ BẰNG THUẬT TOÁN Ơ-CLIT.

Bài 1.

Cho 2 số tự nhiên a và b (a > b).

a) Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì (a, b) = b.

b) Chứng minh rằng nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN của hai số bằng ƯCLN của số nhỏ và số dư trong phép chia số lớn cho số nhỏ.

c) Dùng các nhận xét trên để tìm ƯCLN(72, 56).

Giải.

a) Mọi ước chung của a, b hiển nhiên là ước của b. Đảo lại, do a chia hết cho b nên b là ước chung của a và b. Vậy (a, b) = b.

b) Gọi r là số dư trong phép chia a cho b (a > b). Ta có a = kb + r $(k \in N)$ cần chứng minh rằng (a, b) = (a, r).

thật vậy nếu a và b cùng chia hết cho d thì r chia hết cho d, do đó ước chung của a và b cũng là ước chung của b và r (1). Đảo lại nếu b và r cùng chia hết cho d thì a chia hết cho d, do đó ước chung của b và r củng là ước chung của a và b (2). Từ (1), và (2) suy ra tập hợp các ước chung của a và b và tập hợp các ước chung của b và r bằng nhau. Do đó hai số lơn nhất trong hai tập hợp đó cũng băng nhau, tức là (a, b) =(b, r).

c) 72 chia 56 dư 16 nên (72, 56) = (65, 16);

56 chia 16 dư 8 nên (56, 16) = (16, 8);

16 chia hết 8 nên (16, 8) = 8

Vậy (72, 56) = 8

Bài 2.

Tìm ƯCLN(A, B), biết rằng A là số gồm 1991 chữ số 2, B là số gồm 8 chữ số 2.

Giải.

Ta có 1991 chia cho 8 dư 7, còn 8 chia cho 7 dư 1.

Theo thuật toán Ơ-clit :

$$(A,B)=\left(\underset{1991\ so}{22...2},\underset{8\ so}{22...2}\right)=(\underset{8\ so}{22...2},\underset{7\ SO}{22...2})=(\underset{7\ SO}{22...2},2)=2$$

Bài 3.

Tìm hai số, biết rằng bội chung nhỏ nhất của chung và ước chung lớn nhất của chúng có tổng bằng 19.

Giải.

Gọi a và b là hai số phải tìm , d là ƯCLN(a, b)

$$\text{ƯCLN(a, b)} = d \Leftrightarrow \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ (a', b') = 1 \end{cases}$$

$$\text{BCNN(a, b)} = \frac{a.b}{\text{UCLN(a, b)}} = \frac{da'.db'}{d} = da'b'$$

Theo đề bài : BCNN(a, b) + ƯCLN(a, b) = 19

Nên da’b’ + d = 19

Suy ra d(a’b’ + 1) = 19

Do đó a’b’ + 1 là ước của 19, và $a'b'+1 \geq 2$

Giả sử $a \geq b$ thì $a' \geq b'$. Ta được :

D	a’b’ + 1	a’.b’	a’	b’	a	b
1	19	$18 = 2.3^2$	18	1	18	1
			9	2	9	2

Đáp số : 18 và 1; 9 và 2.

DẠNG 5. HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU.

Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số có ƯCLN bằng 1. Nói cách khác, chúng chỉ có ước chung duy nhất là 1.

Bài 1.

Chứng minh rằng

a) Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 $(n \in N)$ **là hai số nguyên tố cùng nhau**.

Giải.

a) Gọi $d \in UC(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in UC(2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$

Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d = 1.

c) Gọi $d \in UC(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Bài 2.

Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng củng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a. **a và a + b**

b. **a^2 và a + b**

c. **ab và a + b**

Giải.

a) Gọi d ƯC(a, a + b) $\Rightarrow (a+b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên d $\in$ ƯC(a, b), do đó d = 1 (vì a và b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d. trái với giả thiết (a, b) = 1

Vậy a^2 và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, trong đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.

Vậy (ab, a + b) = 1.

Bài 3.

Tìm số tự nhiên n để các số 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau.

Giải.

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

9n + 24 – 3(3n + 4) $\vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2, 3\}$.

Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số 9n + 24 và 3n + 4 không chia hết cho 2. Ta thấy :

9n + 24 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 9n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ

3n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 3n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ.

Vậy điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là n là số lẻ.

Bài 4.

Tìm $n \in Z$ để một trong các phân số sau tối giản.

a) $\frac{18n+3}{21n+7}$

b) $\frac{2n+3}{n+7}$

Giải.

a) ta có: $\frac{18n+3}{21n+7} = \frac{3(6n+1)}{7(3n+1)}$ mà (3, 7) = (3, 3n + 1) = (6n + 1, 3n + 1) = 1

nên để $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản ta phải có (6n + 1, 7) = 1.

Mặt khác, 6n + 1 = 7n – (n – 1), do đó :

$$(6n+1,7) = 1 \Leftrightarrow (n-1,7) = 1 \Leftrightarrow n \neq 7k+1 (k \in Z)$$

Vậy với n chia cho 7 không dư 1 thì $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $\frac{2n+3}{n+7} = 2 - \frac{11}{n-7}$ tối giản $\Leftrightarrow (n+7,11) = 1 \Leftrightarrow n \neq 11k - 7 (k \in Z)$

DẠNG 6. TÌM ƯCLN CỦA CÁC BIỂU THỨC SỐ.

Bài 1.

Tìm ƯCLN của 2n – 1 và 9n + 4 $(n \in N)$

Giải.

Gọi d $\in$ ƯC(2n – 1, 9n + 4) $\Rightarrow$ 2(9n + 4) – 9(2n – 1) $\vdots$ d $\Rightarrow 17 \vdots d \Rightarrow d \in \{1,17\}$

Ta có $2n-1 \vdots 17 \Leftrightarrow 2n-18 \vdots 17 \Leftrightarrow 2(n-9) \vdots 17 \Leftrightarrow n-9 \vdots 17 \Leftrightarrow n = 17k+9 (k \in N)$

Nếu n = 17k + 9 thì $2n-1 \vdots 17$ và 9n + 4 =9(17k + 9) + 4 = bội 17 + 85 ⋮ 17, do đó (2n + 1, 9n + 4) = 17.

Nếu n $\neq$ 17k + 9 thì 2n – 1 không chia hết cho 17, do đó (2n – 1, 9n + 4) = 1

Bài 2.

Tìm ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và 2n + 1 $(n \in N^*)$.

Giải.

Gọi d $\in$ ƯC $\left(\frac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right)$ thì n(n + 1) ⋮ d và 2n + 1 ⋮ d

Suy ra n(2n +1) ⋮ d và n^2 ⋮ d suy ra n⋮ d. Ta lại có 2n + 1 ⋮ d, do đó 1 ⋮ d, nên d = 1.

Vậy ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và 2n + 1 bằng 1.

Bài 3.

Cho ƯCNN(a, b) = 1, tìm ƯCNN(11a + 2b, 18a + 5b)

Giải.

Giả sử d = (11a + 2b, 18a + 5b), khi đó d | 18a + 5b và d | 11a + 2b , suy ra d | 11(18a + 5b) – 18(11a + 2b) = 19b $\Rightarrow$ d | 19 hoặc d | b.

i) Nếu d | b thì từ d | 5(11a + 2b) – 3(18a + 5b) = a – 5b $\Rightarrow$ d | a $\Rightarrow$ d | (a, b) = 1 $\Rightarrow$ d = 1.

ii) Nếu d | 19 thì d = 1, hoặc d = 19.

Vậy (11a + 2b, 18a + 5b) băng 1 hoặc bằng 19.

Bài 4.

Cho ƯCLN(m, n) = 1, tìm ƯCLN(m + n, $m^2 + n^2$).

Giải.

Giả sử d = (m + n, $m^2 + n^2$). Khi đó d | m + n và d | $m^2 + n^2$ suy ra d | $(m + n)^2 - (m^2 - n^2) = 2mn$.

d | m + n và d | 2mn suy ra

d | 2m(m + n) – 2mn = $2m^2$ và d | 2n(m + n) – 2mn = $2n^2$.

Do đó d | $(2m^2, 2n^2) = 2(m^2, n^2) = 2 \Rightarrow$ d = 1 hoặc d = 2.

- Nếu m, n cùng lẻ thì d = 2,
- Nếu m,n khác tính chẵn lẻ thì d = 1.

C. Bài tập.

1. Cho a và b là hai nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là 2 nguyên tố cùng nhau.

a) b và b – a (a > b)

b) $a^2 + b^2$ và ab.

2. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng nhau với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

3. Cho (a, b) = 1. tìm

a) (a + b, a – b)

b) (7a + 9b, 3a + 3b)

4. Tìm ƯCLN của 7n + 3 và 81 – 1. Khi nào hai số đó nguyên tố cùng nhau? Tìm n trong khoảng từ 40 đến 90 để chúng không nguyên tố cùng nhau.

5. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có :

a) 10 ước

b) 21 ước

c) 8 ước

6. a) Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có chín chử số gồm các chử từ 1 đến 9

b) Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có 6 chử số, gồm các chử số từ 1 đế **6.**

7. Tìm ƯCLN của

a) Hai số chẳn khác 0 liên tiếp.

b) $\overline{ab} + \overline{ba}$ và 33.

8. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để các phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, ..., \frac{31}{n+33}$$

9. Tìm dư trong phép chia [123456789, 987654321] cho 11.

10. Dùng thuật toán Euclid để chứng minh: $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

11. Chứng minh rằng nếu | kn – lm | = 1 thì (ma + nb, ka + lb) = (a, b).

Hướng dẫn giải.

1. a. Gọi d $\in$ ƯC(b, a – b) thì a – b $\vdots$ d, b $\vdots$ d, do đó a $\vdots$ d.

Ta có (a, b) = 1 nên d = 1.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

2. Giả sử ab và c cùng chia hết cho nguyên tố d thì vô lí.

3. a) ƯCLN(a + b, a – b) = 2 nếu a và b cùng lẻ, bằng 1 nếu trong avà b có một số chẵn, một số lẻ.

b) 1 hoặc 29.

4. (7n + 3, 8n – 1) băng 1 hoặc 31.

Nếu n $\neq$ 31k + 4 thì (7n + 3,8n – 1) = 1.

Với 40 < n < 90 ta có n = 66 thì (7n + 3, 8n – 1) = 31.

5. a) Xét các dạng a^9 và a^4b.

Đáp số: Số nhỏ nhất là 48.

b) Đáp số: $2^6.3^2 = 576$

c) Đáp số: $2^3.3 = 24$.

6. a) Hiệu hai số 123456789 và 987654321 bằng 9, nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3, 9. Chú ý rằng mọi số có chín chử số gồm các chử số từ 1 đến 9 đều chia hết cho 9. Vậy ƯCLN phải tìm bằng 9.

b) ƯCLN phải tìm bằng 3.

7. a) 2

b) ƯCLN($\overline{ab} + \overline{ba}$, 33) = 33 nếu a + b $\vdots$ 3, bằng 11 trong trường hợp còn lại.

8. Các số đã cho có dạng $\dfrac{k}{k+(n+2)}$ (k = 7, 8, …, 31). Mà

$\dfrac{k+(n+2)}{k} = 1 + \dfrac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow$ (n + 2, k) = 1 $\Leftrightarrow$ n + 2 nguyên tố cùng nhau với 7, 8, …, 31 và n + 2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ n + 2 = 37 $\Leftrightarrow$ n = 35

9. a = 123456789, b = 987654321. Ta có b – 8a = 9 và a, b $\vdots$ 9 nên (a, b) = 9;

$[a,b] = \dfrac{ab}{9} = \dfrac{a}{9}.b$ mà $\dfrac{a}{9} = 11k + 3, b = 11l + 5 \Rightarrow \dfrac{a}{9}.b = 11m + 4$.

10. Ta có:

$n^4 + 3n^2 + 1 = \left(n^3 + 2n\right)n + n^2 + 1$

$n^3 + 2n = \left(n^2 + 1\right)n + n$

$n^2 + 1 = n.n + 1$

$n = 1.n + 0.$

Vậy : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

11. d | a, d | b thì d | ma + nb, d | ka + lb;

d | ma + nb, d | ka + lb thì d | k(ma + nb) – m(ka + lb) = $\pm$ b $\Rightarrow$ d | b

Tương tự d | a.

MỤC LỤC

MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1. Toán học tuổi trẻ của Nhà xuất bản giáo dục .

2. Toán tuổi thơ 2. của Nhà xuất bản giáo dục.

3. Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học cở sở - số học của Nguyễn Vũ Thanh.

4. Đại số sơ cấp và thực hành giải toán của Hoàng Kỳ - Hoàng Thanh Hà.

5. Toán nâng cao chọn lọc đại số 8 của Phan Thanh Quang.

6. Toán nâng cao và các chuyên đề đại số 7 của Vũ Dương Thuỵ

7. Toán nâng cao số học 6 của Nguyễn Vĩnh Cận.

8. Nâng cao và phát triển toán 6 của Vũ Hữu Bình.

9. Số học của Bộ giáo dục và đào tạo